თავი V

შემთხვევით სიდიდეთა მახასიათებლები

როგორც უკვე ვნახეთ, ბევრი შემთხვევითი მოვლენა და ექსპერიმენტი სრულდება ამა თუ იმ რიცხვითი შედეგით. მაშინაც კი, როცა შედეგი (ელემენტარული ხდომილება) არ არის რიცხვი, ჩვენ ხშირად ვიხილავთ ხდომილებებს, რომელთა აღწერა შესაძლებელია რიცხვების ტერმინებში (მაგალითად, მონეტის ორჯერ აგდებისას – მოსულ გერბთა რიცხვია 1). შესაბამისად, ძალიან მოხერხებული იქნებოდა გვქონოდა გარკვეული მათემატიკური ცნება, რომელიც თავიდან აგვაცილებდა ხდომილებების სიტყვებით გამოსახვის აუცილებლობას. მაგალითად, ნაცვლად იმისა, რომ დაგვეწერა {გერბთა რიცხვია 1} და {გერბთა რიცხვია 2}, ჩვენ შეგვიძლია გერბების რიცხვი აღვნიშნოთ ξ ასოთი და განვიხილოთ ხდომილებები $\{\xi=1\}$ და $\{\xi=2\}$. ξ არის სიდიდე, რომლის მნიშვნელობა უცნობია ექსპერიმენტის ჩატარებამდე, მაგრამ ცნობილი ხდება ექსპერიმენტის ჩატარების შემდეგ.

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეზე განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას **შემთხვევითი სიდიდე** ეწოდება. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული ტიპის** სიდიდე თუ ის ღებულობს ცალკეულ, იზოლირებულ შესაძლო მნიშვნელობებს. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის** სიდიდე თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე მთლიანად ავსებს რაიმე რიცხვით შუალედს.

ცხრილს, რომელშიც ჩამოთვლილია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები და მათი შესაბამისი ალბათობები, **განაწილების კანონი (ან მწკრივი)** ეწოდება:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

აქ $\sum_i p_i = 1$. ალბათობის სტატისტიკური განმარტებიდან გამომდინარე:

თეორიული სიხშირე ≈ **ერთობლივი სიხშირე** × ***ალბათობა.***

$P(\xi \in \langle a,b \rangle) = \sum_{x \in \langle a,b \rangle} P(\xi = x)$. თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე ξ და რაიმე რიცხვითი g ფუნქცია, მაშინ $g(\xi)$ ისევ იქნება დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების კანონით:

$g(x_i)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება. დავუშვათ, რომ ყუთში N ბურთია და მათ შორის M თეთრია. შემთხვევით, დაბრუნების გარეშე ყუთიდან ვიღებთ n ბურთს. ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ n ბურთს შორის ზუსტად m ცალი იქნება თეთრი გამოითვლება ფორმულით:

$$P(N;M;n;m) := P(\mu_n = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \; m = 0,1,...,\min(M,n).$$

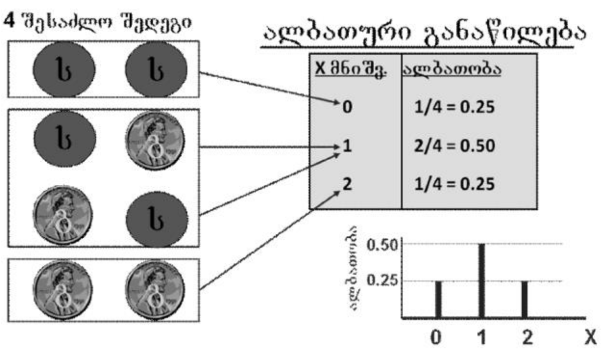
რიცხვთა ამ მიმდევრობას **ჰიპერგეომეტრიული განაწილება** ეწოდება და გამოიყენება აღნიშვნა ***HG*(*N*,*M*,*n*)**.

გეომეტრიული განაწილება (*Geo*(*p*)): $P(\xi = k) = pq^{k-1}$ $(q = 1-p)$, $k = 1,2,...$.

პუასონის განაწილება პარამეტრით λ (*Po*(λ)):

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = 0,1,2,....$$

სიმეტრიული მონეტის ორჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობის განაწილების კანონი



შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x) := P(\xi < x) \text{ (შესაბამისად, } F(x) := P(\xi \le x)\text{)}$$

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a) \text{ (შესაბამისად,}$$

$$P(a \le \xi < b) = F(b-0) - F(a-0)\text{).}$$

განაწლების ფუნქციის თვისებები:

1) ნებისმიერი x-სათვის $0 \le F(x) \le 1$;

2) განაწილების ფუნქცია არაკლებადია;

3) განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან (თუ განაწილების ფუნქციას განვმარტავთ როგორც: $F(x) := P(\xi \le x)$, მაშინ ის იქნება მარჯვნიდან უწყვეტი);

4) $F(x) = \sum_{x_k < x} P\{\xi = x_k\}$ (შესაბამისად, $F(x) = \sum_{x_k \le x} P\{\xi = x_k\}$);

5) $P\{\xi = x_k\} = F(x_k + 0) - F(x_k)$ (შესაბამისად,

$P\{\xi = x_k\} = F(x_k) - F(x_k - 0)$, როცა $F(x) := P(\xi \le x)$).

შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს უწყვეტი განაწილების ფუნქცია, უწოდებენ **უწყვეტ შემთხვევით** სიდიდეს. თუ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)$ წარმოებადია, მაშინ მის წარმოებულს შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების სიმკვრივე** ეწოდება და აღინიშნება $f(x)$-ით: $f(x) = F^{'}(x)$.

$$f(x) \ge 0;\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;\ P(\xi \in \langle a,b \rangle) = \int_a^b f(x)dx;\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

უწყვეტი განაწილების ფუნქციის p **რიგის კვანტილი** ეწოდება ისეთ x_p რიცხვს, რომლისთვისაც $F(x_p) = p$. საზოგადოდ, $x_p = \min\{x : F(x) \ge p\}$. დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში, თუ

$p_1 + p_2 + \dots + p_i < p \le p_1 + p_2 + \dots + p_i + p_{i+1}$, მაშინ $x_p = x_{i+1}$. $p = 1/2$ რიგის კვანტილს შემთხვევითი სიდიდის ან მისი განაწილების ფუნქციის **მედიანა** ეწოდება და აღინიშნება Mo, ე. ი. $Mo = x_{1/2}$. **მოდა** ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის იმ მნიშვნელობას (ან მნიშვნელობებს), რომელიც შეესაბამება განაწილების სიმკვრივის

ლოკალურ მაქსიმუმს უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში ან ალბათობის ლოკალურ მაქსიმუმს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში და აღინიშნება სიმბოლოთი Me.

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე

დისკრეტული ორგანზომილებიანი (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონს (ანუ** ξ *და* η შემთხვევითი სიდიდეების **ერთობლივ განაწილების კანონს)** აქვს ორგანზომილებიანი ცხრილის სახე, რომელიც გვაძლევს შესაძლო მნიშვნელობების ცალკეული კომპონენტების ჩამონათვალს და იმ $p(x_i, y_j)$ ალბათობებს, რა ალბათობებითაც მიიღება მნიშვნელობა (x_i, y_j):

η	ξ					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
...	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

$$\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1;\ P(\xi = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j);\ P(\eta = y_j) = \sum_i p(x_i, y_j).$$

ორგანზომილებიანი (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ფუნქცია (**ან ξ *და* η შემთხვევითი სიდიდეების **ერთობლივი განაწილების ფუნქცია)** ეწოდება ფუნქციას: $F(x, y) = P(\xi \le x, \eta \le y)$.

1) $0 \le F(x, y) \le 1$;

2) $F(x, y)$ არის თითოეული არგუმენტის მიმართ არაკლებადი, მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია;

3) ადგილი აქვს ზღვრულ თანაფარდობებს:

$F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$; $F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$;

4) $F(x, \infty) = F_1(x) := P(\xi \le x)$; $F(\infty, y) = F_2(y) := P(\eta \le y)$.

შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება **დამოუკიდებელი,** თუ

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$p(x_i, y_j)= p(x_i)\, p(y_j),\ \forall i, j .$$

უწყვეტი ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის **ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე (ანუ ორგანზომილებიანი სიმკვრივე)** ეწოდება ერთობლივი განაწილების ფუნქციის შერეულ მეორე რიგის კერძო წარმოებულს:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

1) $f(x, y) \ge 0;$ 2) $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(u, v)dudv;$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1;$ 4) $p((X, Y) \in D) = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy.$

5) $f_1(x) = \dfrac{dF_1(x)}{dx} = \dfrac{dF(x, \infty)}{dx} = \dfrac{d\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u, y)dydu\right)}{dx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy,$

ანალოგიურად, $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx.$

6) უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x, y)= f_1(x)\, f_2(y)$.

დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი აღინიშნება $E\xi$ სიმბოლოთი და ეწოდება რიცხვს:

$$E\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega),\ \text{ანუ}\ E\xi = \sum_i x_i P\{\xi = x_i\} \equiv \sum_i x_i p_i .$$

უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება რიცხვს

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx,\ (\text{თუ}\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)dx < \infty).$$

ა) $Ec = c \equiv const;$ ბ) $E(\xi \pm \eta) = E\xi \pm E\eta;$

გ) $E(c\xi)=cE\xi$;   დ) $E(\xi-E\xi)=0$;

ე) $E(\xi-c)^2=E(\xi-E\xi)^2+(c-E\xi)^2$;

ვ) $\min_{c\in(-\infty,+\infty)} E(\xi-c)^2=E(\xi-E\xi)^2$;

ზ) თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდებია, მაშინ $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$ (შებრუნებული დებულება მცდარია).

შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი:

$$Eg(\xi)=\sum_i g(x_i)P\{\xi=x_i\}=\sum_i g(x_i)p_i\,. \qquad (1)$$

თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია $x_1,x_2,\ \ldots,x_n$, ხოლო B რაიმე ხდომილებაა ($P(B)>0$), მაშინ ξ **შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი** B **ხდომილების მიმართ** აღინიშნება $E(\xi\,|\,B)$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E(\xi\,|\,B)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(\xi=x_i\,|\,B)\,.$$

ცხადია, რომ $E(\xi\,|\,\Omega)=E\xi$ და $E(\xi\,|\,B)=\dfrac{1}{P(B)}E(I_B\xi)$.

ξ შემთხვევითი სიდიდის η შემთხვევით სიდიდეზე **რეგრესიის მრუდი (ფუნქცია)** ეწოდება ფუნქციას $R(y)=E(\xi\,|\,\eta=y)$.

შემთხვევითი სიდიდეს $R(\eta)$ (რეგრესიის ფუნქციაში ჩასმულია η შემთხვევითი სიდიდე) ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობით მათემატიკურ ლოდინს** უწოდებენ η პირობით და $E(\xi\,|\,\eta)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

ξ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია $D\xi$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$DX=E(\xi-E\xi)^2\equiv E\xi^2-(E\xi)^2\,.$$

$E\xi$-ს ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის **მეორე რიგის მომენტი** (თვითონ დისპერსიას უწოდებენ აგრეთვე – **მეორე რიგის ცენტრალურ მომენტს).**

თუ დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

მაშინ $DX = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \sum_{j=1}^{n} x_j p_j)^2 p_i$, ანუ $DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (\sum_{j=1}^{n} x_j p_j)^2$.

I. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია – $Dc = 0$;

II. $D(a\xi + b) = a^2 D\xi$.

III. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta .$$

ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი დისპერსია** B ხდომილების მიმართ:

$$D(\xi \mid B) := E\{[\xi - E(\xi \mid B)]^2 \mid B\} = E(\xi^2 \mid B) - [E(\xi \mid B)]^2 .$$

ბერნულის განაწილება (ანუ ბერნულის შემთხვევით სიდიდე) აღინიშნება სიმბოლოთი $Bern(P)$ და აქვს სახე:

ξ	1	0
P	p	$1-p$

აქ $E\xi = p$ და $D\xi = p(1-p)$.

ბინომიალური განაწილების შემთხვევაში: $E\xi = np$, $D\xi = np(1-p)$, $Mo = [(n+1)p]$, $Me = [np]$.

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში:

$$E\xi = \frac{n \cdot M}{N} \ , \ D\xi = \frac{n \cdot M \cdot (N-M) \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)} \text{ და } Mo\xi = \left[\frac{(M+1)(n+1)}{N+2}\right].$$

პუასონის განაწილების შემთხვევაში: $E\xi = D\xi = \lambda$, $Mo = [\lambda] - 1$, $Me = \left[\lambda + \frac{1}{3} - \frac{0.02}{\lambda}\right]$.

გეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში: $E\xi = 1/p$, $D\xi = (1-p)/p^2$, $Mo\xi = 1$, $Me\xi = \left[\frac{-1}{\log_2(1-p)}\right]$.

ექსპონენციალური განაწილება. ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **ექსპონენციალურად განაწილებული პარამეტრით** λ ($\lambda > 0$) და აღინიშნება სიმბოლოთი $Exp(\lambda)$, თუ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში: $E\xi = 1/\lambda$, $D\xi = 1/\lambda^2$, $Mo\xi = 0$, $Me\xi = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ და $x_p = -\dfrac{\ln(1-p)}{\lambda}$.

სტანდარტული გადახრა. მომენტები.

ξ შემთხვევითი სიდიდის **საშუალო კვადრატული გადახრა (ან სტანდარტული გადახრა):** $\sigma\xi = +\sqrt{D\xi}$.

შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია: $\eta = \dfrac{\xi - E\xi}{\sigma\xi}$ ($E\eta = 0$, $D\eta = 1$).

მომენტები, ასიმეტრია და ექსცესი.

ξ შემთხვევითი სიდიდის n **რიგის საწყისი მომენტი** ეწოდება სიდიდეს $\mu_n := E\xi^n$ ($a := \mu_1 = E\xi$).

ξ შემთხვევითი სიდიდის n **რიგის ცენტრალური მომენტი** ეწოდება სიდიდეს $\nu_n := E(\xi - a)^n$ ($\sigma^2 := \nu_2 = D\xi$).

ექსცესის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$e = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(\xi - E\xi)^4}{[+\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\,]^4} - 3 .$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$\alpha = \frac{\nu_3}{\sigma^3} = \frac{E(\xi - E\xi)^3}{[+\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\,]^3} .$$

კოვარიაცია. კორელაციის კოეფიციენტი.

კოვარიაციის კოეფიციენტი ან უბრალოდ **კოვარიაცია** ეწოდება სიდიდეს:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] \equiv E(\xi\eta) - E\xi E\eta .$$

1) თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$ (შებრუნებული დებულება არაა სამართლიანი);

2) $\operatorname{cov}(\xi,\xi)=D\xi$;

3) $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)$;

4) $\operatorname{cov}(c\cdot\xi,\eta)=c\cdot\operatorname{cov}(\xi,\eta)$;

5) $\operatorname{cov}(\xi\pm\eta,\varsigma)=\operatorname{cov}(\xi,\varsigma)\pm\operatorname{cov}(\eta,\varsigma)$;

6) $D(\xi\pm\eta)=D\xi\pm2\operatorname{cov}(\xi,\eta)+D\eta$;

7) $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)|\le\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}$.

კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$\rho(\xi,\eta):=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}\equiv E\left(\frac{\xi-E\xi}{\sigma\xi}\cdot\frac{\eta-E\eta}{\sigma\eta}\right).$$

ა) $-1\le\rho(\xi,\eta)\le1$.

ბ) თუ $\rho(\xi,\eta)=1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b – მუდმივებია, $k>0$.

გ) თუ $\rho(\xi,\eta)=-1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b – მუდმივებია, $k<0$.

დ) თუ $\eta=k_1\xi+b_1$, ($k_1\neq0$) ან $\xi=k_2\eta+b_2$ ($k_2\neq0$), მაშინ $\rho(\xi,\eta)=1$ როცა $k_i>0$; $\rho(\xi,\eta)=-1$ როცა $k_i<0$ (i = 1,2).

მაგალითი 1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მონეტის სამჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რიცხვი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე რვა ელემენტიანი სიმრავლეა:

$$\Omega=\{\text{გგგ},\text{გგს},\text{გსგ},\text{სგგ},\text{გსს},\text{სგს},\text{სსგ},\text{სსს}\}$$

და, შესაბამისად, საძიებელი შემთხვევითი სიდიდე იქნება Ω-ზე განსაზღრული შემდეგი რიცხვითი ფუნქცია:

$$\xi(\text{გგგ})=3\ ;\ \xi(\text{გგს})=\xi(\text{გსგ})=\xi(\text{სგგ})=2\ ;$$
$$\xi(\text{გსს})=\xi(\text{სგს})=\xi(\text{სსგ})=1 \quad \text{და} \quad \xi(\text{სსს})=0\ .$$

ცხადია ეს შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტული ტიპისაა, ის ღებულობს იზოლირებულ მნიშვნელობებს, მაგალითად, 1-სა და 2-ს შორის ის არ ღებულობს არც ერთ მნიშვნელობას.

მაგალითი 2. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 36 ელემენტარული ხდომილებისაგან:

$$\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,...,6\},$$

ხოლო შემთხვევითი სიდიდე ცალკეულ ელემენტარულ ხდომილებას (i,j) (სადაც i – პირველ კამათელზე მოსული ქულაა, ხოლო j – მეორე კამათელზე მოსული ქულა) შეუსაბამებს: $\xi(i,j) = i + j$ (პირველ და მეორე კამათელზე მოსული ქულების ჯამი). მაგალითად, $\xi(1,3) = \xi(2,2) = \xi(3,1) = 4$. აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია: 2, 3, . . . , 12. ის დიკრეტული ტიპისაა. ადვილი დასანახია, რომ განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე:

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

მაგალითად, $P(\xi = 4) = P\{(1,3);(2,2);(3,1)\} = 3/36$.

მაგალითი 3. ორი მსროლელი თითოჯერ ესვრის სამიზნეს. მათ მიერ სამიზნის დაზიანების (მიზანში მოხვედრის) ალბათობებია შესაბმისად 0.6 და 0.7. შემთხვევითი სიდიდე ξ იყოს სამიზნის დაზიანებათა რაოდენობა. შევადგინოთ მისი განაწილების მწკრივი.

ამოხსნა. ცხადია, რომ ξ შემთხვევითმა სიდიდემ შეიძლება მიიღოს შემდეგი მნიშვნელობები: 0 (ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე), 1 (მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე) და 2 (ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე). ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

შეგვძლია ვიგულისხმოთ რომ პირველი და მეორე მსროლელის სროლის შედეგები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – პირველმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე და B – მეორე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე. მოცემულია, რომ $P(A) = 0.6$ და $P(B) = 0.7$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 0.4$ და $P(\overline{B}) = 0.3$. გარდა ამისა, A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. დამოუკიდებელი ხდომილებებია აგრეთვე: $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და $\overline{B}$.

ადვილი დასანახია, რომ ხდომილება – ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე იქნება $\overline{A}\cap\overline{B}$, ხდომილება – მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნება $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ და ხდომილება – ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნება $A\cap B$. გასაგებია, რომ $(A\cap\overline{B})$ და $(\overline{A}\cap B)$ უთავსებადი ხდომილებებია $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)=\varnothing$.

ამიტომ, დამოუკიდებელ ხდომილებათა ნამრავლის ალბათობისა და უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$P(\xi=0)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.4\cdot 0.3=0.12\,;$$

$$P(\xi=1)=P\{(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\}=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=$$

$$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.7=0.46\,;$$

$$P(\xi=2)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.7=0.42$$

შესაბამისად, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივი იქნება:

x_i	0	1	2
p_i	0.12	0.46	0.42

მაგალითი 4. ვიპოვოთ წესიერი მონეტის ოთხჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება $2^4=16$ ტოლშესაძლებელი ოთხეულისაგან, ხოლო განსახილველი ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია k = 0, 1, 2, 3 ან 4. გასაგებია, რომ საქმე გვაქვს ბერნულის სქემასთან, სადაც წარმატებაა გერბის მოსვლა და რადგან მონეტა წესიერია, წარმატების ალბათობაა 1/2. შემთხვევითი სიდიდე ამ შემთხვევაში წარმოადგენს მონეტის ოთხჯერ აგდებისას წარმატებათა რაოდენობას და შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$p_k=P(\xi=k)=P_4(k)=C_4^k(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{4-k}=C_4^k/16\,,\ k=0,1,2,3,4\,.$$

ამიტომ $p_0=1/16$, $p_1=1/4$, $p_2=3/8$, $p_3=1/4$, $p_4=1/16$.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ წესიერი მონეტის ოთხჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობის განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. როგორც ზემოთ ვნახეთ აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	0	1	2	3	4
P	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

შესაბამისად, განმარტების თანახმად ($F_\xi(x) = \sum_{x \le x_k} p_k$) გვაქვს:

$$F_\xi(0) = p_0 = 1/16,$$

$$F_\xi(1) = p_0 + p_1 = 5/16,$$

$$F_\xi(2) = p_0 + p_1 + p_2 = 11/16,$$

$$F_\xi(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 15/16,$$

$$F_\xi(4) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

ამიტომ საბოლოოდ ვწერთ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x < 0, \\ 1/16, & \text{თუ} \quad 0 \le x < 1, \\ 5/16, & \text{თუ} \quad 1 \le x < 2, \\ 11/16, & \text{თუ} \quad 2 \le x < 3, \\ 15/16, & \text{თუ} \quad 3 \le x < 4, \\ 1, & \text{თუ} \quad x \ge 4. \end{cases}$$

მაგალითი 6. ცნობილია, რომ $P\{\xi > 3\} = 1/3$. იპოვეთ $F_\xi(3)$.

ამოხსნა. განაწილების ფუნქციის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$F_\xi(3) = P\{\xi \le 3\} = 1 - P\{\xi > 3\} = 2/3.$$

მაგალითი 7. მოცემულია ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები:

ξ	-1	0
P	0.5	0.5

η	0	1
P	0.5	0.5

შეადარეთ ერთმანეთს $F_\xi(F_\eta(0.5))$ და $F_\eta(F_\xi(0.5))$.

ამოხსნა. განაწილების ფუნქციის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$F_\eta(0.5) = P\{\eta \le 0.5\} = P\{\eta = 0\} = 0.5\,,$$

შესაბამისად,

$$F_\xi(F_\eta(0.5)) = P\{\xi \le 0.5\} = P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 0\} = 1.$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $F_\eta(F_\xi(0.5)) = 1$.

მაგალითი 8. ცნობილია, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს ორ მნიშვნელობას $x_1 = 2$ და $x_2 = 3$, ხოლო მისი მათემატიკური ლოდინია $E\xi = 2.2$. იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, განაწილების ფუნქცია და დისპერსია.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $P\{\xi = 2\} = p$, მაშინ $P\{\xi = 3\} = 1 - p$. მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$2.2 = 2p + 3(1 - p)\,,$$

საიდანაც $p = 0.8$. შესაბამისად, განაწილების კანონს აქვს სახე:

ξ	2	3
P	0.8	0.2

აქედან გამომდინარე, განაწილების ფუნქცია იქნება:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x < 2, \\ 0.8, & \text{თუ} \quad 2 \le x < 3, \\ 0.8 + 0.2, & \text{თუ} \quad x \ge 3. \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x < 2, \\ 0.8, & \text{თუ} \quad 2 \le x < 3, \\ 1, & \text{თუ} \quad x \ge 3. \end{cases}$$

გამოვთვალოთ დისპერსია:

$$D\xi = (2 - 2.2)^2 \cdot 0.8 + (3 - 2.2)^2 \cdot 0.2 = 0.16\,.$$

მაგალითი 9. A კომპანია ინვესტორებს პირდება წლიურ 40%-ს, მაგრამ შესაძლებელია გაკოტრდეს ალბათობით 0.3, ხოლო B კომპანია ინვესტორებს პირდება წლიურ 30%-ს, მაგრამ შესაძლებელია გაკოტრდეს ალბათობით 0.2. იგულისხმება, რომ კომპანიების გაკოტრება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. ინვესტორმა A კომპანიაში ჩადო 20 მილიონი ლარი, ხოლო B

კომპანიაში კი 18 მილიონი ლარი. შეადგინეთ ორივე კომპანიიდან ინვესტორის ერთობლივი შემოსავლების ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, გამოთვალეთ მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ამოხსნა. ცხადია, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია:

$x_1 = 0$, თუ ორივე კომპანია გაკოტრდა;

$x_2 = 20 + 0.4 \cdot 20 = 28$, თუ გაკოტრდა მხოლოდ B კომპანია;

$x_3 = 18 + 0.3 \cdot 18 = 23.4$, თუ გაკოტრდა მხოლოდ A კომპანია;

$x_4 = 28 + 23.4 = 51.4$, თუ არცერთი კომპანია არ გაკოტრდა.

ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის ასაგებად საჭიროა გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{\xi = x_i\},\ i = 1,2,3,4$. ამ მიზნით შემოვიღოთ ხდომილობები: C={A კომპანია გაკოტრდება}, D={B კომპანია გაკოტრდება}. მაშინ ცხადია, რომ $P\{\xi = x_1\} = P\{CD\}$ და ვინაიდან ამოცანის პირობებში ეს ხდომილობები დამოუკიდებელია, ამიტომ დამოუკიდებლობის განმარტების თანახმად: $P\{\xi = x_1\} = P\{CD\} = P\{C\}P\{D\} = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$.

გარდა ამისა, გასაგებია, რომ $P\{\xi = x_2\} = P\{\overline{C}D\}$, $P\{\xi = x_3\} = P\{C\overline{D}\}$ და $P\{\xi = x_4\} = P\{\overline{C}\,\overline{D}\}$. როგორც ცნობილია, როცა ორი ხდომილოება დამოუკიდებელია, მაშინ აგრეთვე დამოუკიდებელია ერთ-ერთი მეორის საწინააღმდეგოსგან . საიდანაც ვღებულობთ, რომ დამოუკიდებლებია $\overline{C}$ და D, C და $\overline{D}$, $\overline{C}$ და $\overline{D}$. ამიტომ გვაქვს:

$$P\{\xi = x_2\} = P\{\overline{C}D\} = P\{\overline{C}\}P\{D\} = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14;$$

$$P\{\xi = x_3\} = P\{C\overline{D}\} = P\{C\}P\{\overline{D}\} = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24;$$

$$P\{\xi = x_4\} = P\{\overline{C}\,\overline{D}\} = P\{\overline{C}\}P\{\overline{D}\} = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56.$$

შესაბამისად, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი იქნება:

ξ	0	23.4	28	51.4
P	0.06	0.24	0.14	0.56

განმარტების თანახმად:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 38.32;$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^{4} (x_i - E\xi)^2 p_i = 252.25.$$

მაგალითი 10. წრიულ სამიზნეს შეუძლია იტრიალოს ცენტრის გარშემო. ის დაყოფილია თანაბარი ზომის რვა სექტორად, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 8-მდე. სამიზნის საკმარისად სწრაფი ტრიალის შემთხვევაში მსროლელი ვერ ასხვავებს სექტორის ნომრებს და იძულებულია ისროლოს შემთხვევით. თუ ტყვია მოხვდება i-ურ სექტორს მსროლელი იგებს i ლარს ($i = 1,2,...,8$). მიზანშეწონილია თუ არა მსროლელმა ესროლოს სამიზნეს, თუ ამაში მან უნდა გადაიხადოს 5 ლარი?

ამოხსნა. რადგანაც სამიზნე სწარაფად ტრიალებს, მსროლელის შესაძლებლობებს არანაირი აზრი არ გააჩნია: მიზანში მოხვედრა – წმინდა წყლის შემთხვევითობაა. შემთხვევითი სიდიდე ξ იყოს შესაძლო მოგებები. მან შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობები 1, 2, … , 8, და ვინაიდან ყველა სექტორი ერთნაირია, თითოეულ ამ მნიშვნელობას შემთხვეითი სიდიდე მიიღებს ერთი და იმავე ალბათობით 1/8. შესაბამისად, მათემატიკური ლოდინი იქნება:

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 8 \cdot \frac{1}{8} = 4.5 \text{ ლარი}.$$

მაშასადამე, საშუალო მოგება შეადგენს 4.5 ლარს და ამიტომ არ ღირს სროლის უფლებაში 5 ლარის გადახდა.

თამაშის მათემატიკური ლოდინი. მოთამაშე დებს 1 ლარს, ასახელებს რაიმე რიცხვს 1-დან 6-მდე, აგორებენ წესიერ კამათელს და თუ მოვა მოთამაშის მიერ დასახელებული რიცხვი, ის იგებს 4 ლარს და, ამასთანავე, უკან უბრუნებენ 1 ლარს. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოთამაშე კარგავს 1 ლარს. ვიპოვოთ მოგების მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. თუ მოგებას აღვნიშნავთ ξ სიმბოლოთი, მისი განაწილების კანონი იქნება:

ξ	4	-1
P	1/6	5/6

შესაბამისად, $E\xi = 4 \cdot (1/6) + (-1) \cdot (5/6) = -1/6 \approx -0.1667$. ეს იმას ნიშნავს, რომ თამაში არ არის სამართლიანი – თამაში ისეთია, რომ მოთამაშე საშუალოდ აგებს. ადვილი დასანახია, რომ თუ ამოცანის პირობაში 4 ლარს შევცვლით 5 ლარით, მაშინ თამაში გახდება „სამართლიანი“ – $E\xi = 0$. *თამაშს ეწოდება სამართლიანი, თუ მოგების მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია, ანუ გრძელ სერიაში მოთამაშე არც იგებს და არც აგებს.*

მათემატიკური ლოდინი და დაზღვევა. დავუშვათ, რომ თქვენ გსურთ დააზღვიოთ თქვენი 2000 ლარის ღირებულების ვიდეოსისტემა მოპარვისაგან. სადაზღვევო კომპანია წელიწადში თქვენგან ითხოვს პრემიას (შენატანს) 225 ლარს. კომპანიამ ემპირიულად დაადგინა, რომ წლის განმავლობაში ვიდეოსისტემის მოპარვის ალბათობაა 0.1. რა იქნება თქვენი მოსალოდნელი დანაკარგი დაზღვევის შემთხვევაში?

ამოხსნა. ეს ფაქტობრივად არის თამაში, სადაც თქვენ დებთ 225 ლარს და 0.1-ის ტოლი ალბათობით იგებთ $2000 - 225 = 1775$ ლარს, ხოლო 0.9-ის ტოლი ალბათობით აგებთ 225 ლარს. ამ „თამაშის“ მათემატიკური ლოდინი წინა მაგალითის მიხედვით იქნება:

$$E\xi = 1775 \cdot 0.1 + (-225) \cdot 0.9 = -25.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ თქვენ მარავალი წლის განმავლობაში დააზღვევთ თქვენს ვიდეოსისტემას ერთი და იგივე პირობებში, მაშინ საშუალოდ წელიწადში თქვენ დაკარგავთ 25 ლარს სადაზღვევო კომპანიის სასარგებლოდ.

შევხედოთ ამ ამოცანას სადაზღვევო კომპანიის თვალთახედვით: კომპანია იგებს 225 ლარს 0.9 ალბათობით და აგებს 1775 ლარს 0.1 ალბათობით. შესაბამისად, მისი „თამაშის“ მათემატიკური ლოდინი იქნება:

$$E\eta = 225 \cdot 0.9 + (-1775) \cdot 0.1 = 25.$$

ე. ი. თუ კომპანიაში თქვენნაირ პირობებში რეგულარულად დაეზღვევა ბევრი კლიენტი, კომპანია წელიწადში თითოეულისგან საშუალოდ მოიგებს 25 ლარს.

მათემატიკური ლოდინი და გადაწყვეტილების მიღება. კულტურის დეპარტამენტს სურს პოპულარული მუსიკალური ჯგუფის კონცერტი ჩაატაროს ღია სტადიონზე და შიშობს, რომ შესაძლებელია იყოს წვიმა. სინოპტიკოების პროგნოზით წვიმის ალბათობა შეადგენს 0.24-ს. დეპარტამენტის შეფასებით, თუ არ იწვიმებს კონცერტისაგან შემოვა 100000 ლარი, ხოლო წვიმის შემთხვევაში მხოლოდ 10000 ლარი. სადაზღვევო კომპანია თანახმაა ეს კონცერტი დააზღვიოს წვიმისაგან 100000 ლარით 20000 ლარიანი პრემიის სანაცვლოდ. უნდა იყიდოს თუ არა დეპარტამენტმა ასეთი დაზღვევა?

ამოხსნა. კულტურის დეპარტამენტს აქვს ორი არჩევანი: A – დააზღვიოს კონცერტი ან B – არ დააზღვიოს კონცერტი. სანამ დეპარტამენტი გადაწყვეტილებას მიიღებს მან უნდა გამოთვალოს ორივე ქმედების შედეგად მოსალოდნელი საშუალო. ξ და η ასოებით აღვნიშნოთ, შესაბამისად, თუ რას მიიღებს დეპარტანენტი თითოეულ შემთხვევში. მაშინ გასაგებია, რომ მათ ექნებათ შემდეგი განაწილებები:

ქმედება		**იწვიმა**	**არ იწვიმა**
A	ξ	90000	80000
B	η	10000	100000
	P	0.24	0.76

შევნიშნოთ, რომ აქ 90000 მიღებულია შემდეგნაირად: დეპარტამენტმა დააზღვია კონცერტი (რაშიც გადაიხადა 20000 ლარი) და მოვიდა წვიმა – კონცერტიდან შემოვიდა 10000 ლარი, ხოლო სადაზღვევო კომპანიამ დეპარტმენტს გადაუხადა 100000 ლარი ($-20000+10000+100000=90000$). თითოეული ქმედებისაგან მოსალოდნელი საშუალოები იქნება:

$$E\xi = 90000\cdot 0.24 + 80000\cdot 0.76 = 82400,$$
$$E\eta = 10000\cdot 0.24 + 100000\cdot 0.76 = 78400.$$

აქედან გამომდინარე, დეპარტამენტმა კონცერტი უნდა დააზღვიოს.

მაგალითი 11. აუდიტორიაში მყოფი 15 სტუდენტიდან 5 ვაჟია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ 6 სტუდენტს შორის 3 ვაჟია?

ამოხსნა. თუ მივუსადაგებთ ჰიპერგეომეტრიულ განაწილებას, გასაგებია, რომ: $N=15$, $M=5$, $n=6$ და $k=3$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(15;5;6;3)=\frac{C_{10}^{3}C_{15-10}^{6-3}}{C_{15}^{6}}=\frac{C_{10}^{3}C_{5}^{3}}{C_{15}^{6}}=\frac{120\cdot 10}{5005}\approx 0.239\,.$$

მაგალითი 12. საქონლის პარტიაში დეფექტურ ნაწარმთა რიცხვი ξ ღებულობს მნიშვნელობა 0-ს ალბათობით – 0.3; მნიშვნელობა 1-ს ალბათობით – 0.4; მნიშვნელობა 2-ს ალბათობით – 0.2 და მნიშვნელობა 3-ს ალბათობით – 0.1 ანუ ξ-ს განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.3	0.4	0.2	0.1

გამოვთვალოთ ξ-ს განაწილების ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

თუ $x\le 0$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P(\varnothing)=0$;

თუ $0<x\le 1$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P(\xi=0)=0.3$;

თუ $1<x\le 2$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P\{(\xi=0)\cup(\xi=1)\}=$

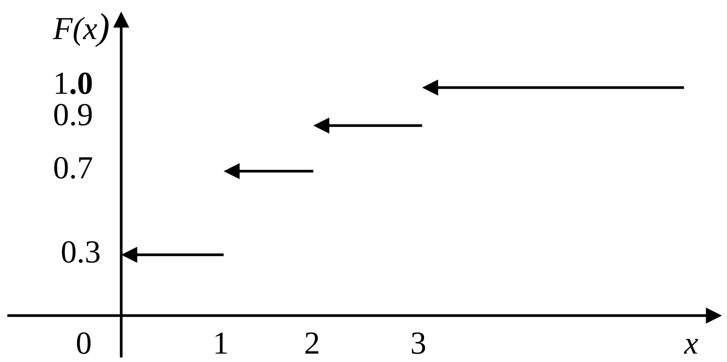
$$=P(\xi=0)+P(\xi=1)=0.3+0.4=0.7\,;$$

თუ $2<x\le 3$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P\{(\xi=0)\cup(\xi=1)\cup(\xi=2)\}=$

$$=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=0.3+0.4+0.2=0.9\,;$$

და ბოლოს, თუ $x\ge 3$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P(\Omega)=1$.

შესაბამისად, განაწილების ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



მაგალითი 13. მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

(სადაც a და b ($a<b$) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია). ვიპოვოთ შესაბამისი განაწილების სიმკვრივე. ცხადია, რომ განმარტების თანახმად:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

რაც შეეხება $x=a$ და $x=b$ წერტილებს, აქ $F(x)$ ფუნქციას წარმოებული არა აქვს და იქ შეგვიძლია $f(x)$ განვმარტოთ ნებისმიერად, ვთქვათ, $f(a)=f(b)=0$. შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს აღნიშნული განაწილების სიმკვრივე, ეწოდება **თანაბარად განაწილებული** $[a,b]$ **მონაკვეთზე და აღინიშნება სიმბოლოთი** $U([a,b])$.

$$EU([a,b])=MeU([a,b])=\frac{a+b}{2} \quad \text{და} \quad DU([a,b])=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

მაგალითი 14. დავუშვათ, რომ ნათურის მუშაობის დრო არის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების ფუნქციით $F(t)$, ხოლო ნათურის გამოცდა გრძელდება ნათურის მწყობრიდან გამოსვლამდე (გადაწვამდე), თუ ეს მოხდება გამოცდის დაწყებიდან არაუმეტეს 100 საათის განმავლობაში, ანუ $t_0=100$ სთ მომენტამდე.

ვთქვათ, $G(t)$ – არის ამ გამოცდის დროს ნათურის ნორმალურად მუშაობის დროის განაწილების ფუნქცია. მაშინ ცხადია, რომ:

$$G(t)=\begin{cases}F(t), & t\le 100\\ 1, & t>100.\end{cases}$$

$G(t)$ ფუნქციას აქვს ნახტომი t_0 წერტილში, ვინაიდან შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს t_0 მნიშვნელობას ალბათობით $1-F(t_0)>0$.

მაგალითი 15. ვიპოვოთ p რიგის x_p კვანტილი თანაბარი განაწილების ფუნქციისათვის.

p $(0<p<1)$ რიგის x_p კვანტილი უნდა ვეძებოთ როგორც $F(x)=p$ განტოლების ამონახსნი. თანაბარი განაწილების ფუნქციის შემთხვევაში ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{x-a}{b-a}=p,$$

საიდანაც ცხადია, რომ:

$$x_p=a+p(b-a)=a(1-p)+bp.$$

როცა $p=0$, მაშინ ნებისმიერი $x\le a$ წარმოადგენს $p=0$ რიგის კვანტილს, ხოლო $p=1$ რიგის კვანტილი იქნება ნებისმიერი $x\ge b$ რიცხვი.

მაგალითი 16. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

η	ξ		
	-2	**3**	**6**
-0.8	**0.1**	**0.3**	**0.1**
-0.5	**0.15**	**0.25**	**0.1**

ვიპოვოთ ცაკლკეული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. ცხრილში მოყვანილი ალბათობების სვეტების მიხედვით შეკრებით მივიღებთ ξ–ს განაწილების მწკრივს:

ξ	**-2**	**3**	**6**
p	**0.25**	**0.55**	**0.2**

ალბათობების შეკრებით სტრიქონების მიხედვით მივიღებთ η-ს განაწილების მწკრივს:

η	**-0.8**	**-0.5**
p	**0.5**	**0.5**

მაგალითი 17. მოცემულია ξ *და* η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონი:

ξ	-2	3	6		η	-0.8	-0.5
p	**0.2**	**0.5**	**0.3**		**p**	**0.4**	**0.6**

ვიპოვოთ $Z = \max\{\xi, \eta\}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. Z შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია: -0.8; -0.5; 3 და 6. გამოვთვალოთ შესაბამისი ალბათობები. გვაქვს:

$$P(Z=-0.8) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.8)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.8) = 0.2\cdot 0.4 = 0.08;$$
$$P(Z=-0.5) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.5)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.5) = 0.2\cdot 0.6 = 0.12;$$
$$P(Z=3) = P\{[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$
$$= P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)] + P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)] = 0.5\cdot 0.4 + 0.5\cdot 0.6 = 0.5;$$
$$P(Z=6) = P\{[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$
$$= P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)] + P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)] = 0.3\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.6 = 0.3.$$

მაგალითი 18. გამოვთვალოთ სათამაშო კამათელზე მოსული ქულათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი. გვაქვს:

$$E\xi = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3.5.$$

მაგალითი 19. დავუშვათ, $g(x) = x^3 - 4x$ და მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

-2	-1	0	2
0.1	0.3	0.4	0.2

დავადგინოთ $\eta = g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი.

ცხადია, რომ $g(-2) = g(0) = g(2) = 0$ და $g(-1) = 3$. ამიტომ η შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0 და 3. დავადგინოთ მისი განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{\eta = 0\}$ და $P\{\eta = 3\}$. რადგან ხდომილებები $\{\xi = -2\}$, $\{\xi = 0\}$ და $\{\xi = 2\}$ უთავსებადია, ამიტომ ალბათობათა შეკრების წესის თანახმად გვექნება:

$$P\{\eta=0\}=P\{\{\xi=-2\}\cup\{\xi=0\}\cup\{\xi=2\}\}=$$
$$=P\{\xi=-2\}+P\{\xi=0\}+P\{\xi=2\}=0.1+0.4+0.2=0.7\ .$$

გარდა ამისა, $P\{\eta=3\}=P\{\xi=-1\}=0.3$. ამიტომ $\eta=g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

0	3
0.7	0.3

გარდა ამისა, $E\eta=0\cdot 0.7+3\cdot 0.3=0.9$.

ახლა გამოვთვალოთ $\eta=g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (1) თანაფარდობის საშუალებით. გვექნება:

$$E\eta=g(-2)\cdot 0.1+g(-1)\cdot 0.3+g(0)\cdot 0.4+g(2)\cdot 0.2=$$
$$=0\cdot 0.1+3\cdot 0.3+0\cdot 0.4+0\cdot 0.2=0.9\,.$$

მაგალითი 20. გამოვთვალოთ პუასონის განაწილების მათემატიკური ლოდინი.

თუ ვისარგებლებთ წარმოდგენით $e^x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$, მაშინ გვექნება:

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda\,.$$

ე. ი. პუასონის განაწილების λ პარამეტრი წარმოადგენს ამ განაწილების მათემატიკურ ლოდინს (საშუალო მნიშვნელობას).

მაგალითი 21. დავუშვათ, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სამი ტოლალბათური ელემენტარული ხდომილებისაგან $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=1/3$. განვმარტოთ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები შემდეგნაირად: $\xi(\omega_1)=1,\ \xi(\omega_2)=0,\ \xi(\omega_3)=-1$;

$$\eta(\omega_1)=1,\ \eta(\omega_2)=0,\ \eta(\omega_3)=1\,.$$

მაშინ გასაგებია, რომ $\xi\eta=\xi$, $E(\xi\eta)=E\xi=1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+(-1)\cdot\frac{1}{3}=0$. შესაბამისად, $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$. მეორეს მხრივ,

$$P\{\xi=0\}=P\{\eta=0\}=P\{\xi=0,\eta=0\}=P(\omega_2)=1/3\,,$$

მაშინ როდესაც ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელი რომ იყოს $\{\xi=0,\eta=0\}$ ხდომილების ალბათობა უნდა ყოფილიყო $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, ე. ი ξ და η არაა დამოუკიდებელი.

მაგალითი 22. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

გამოვთვალოთ მისი დისპერსია.

ვინაიდან დისპერსიის გამოსათვლელად გვაქვს ორი განსხვავებული ფორმულა, შესაბამისად, გვექნება დისპერსიის გამოთვლის ორი ხერხი. მოხერხებულია ეს გამოთვლები ჩაიწეროს ცხრილების სახით.

დისპერსიის გამოთვლის პირველი ხერხი:

i	x_i	p_i	$x_i p_i$	$(x_i-E\xi)^2$	$(x_i-E\xi)^2 p_i$
1	-1	0.10	-0.1	5.29	0.5290
2	0	0.15	0	1.69	0.2535
3	1	0.30	0.3	0.09	0.0270
4	2	0.25	0.5	0.49	0.1225
5	3	0.20	0.6	2.89	0.5780
			$E\xi=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i=1.3$		$D\xi=\sum_{i=1}^{5}(x_i-E\xi)^2 p_i=1.51$

დისპერსიის გამოთვლის მეორე ხერხი:

i	x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	-1	0.10	-0.1	1	0.1
2	0	0.15	0	0	0
3	1	0.30	0.3	1	0.3
4	2	0.25	0.5	4	1
5	3	0.20	0.6	9	1.8
			$E\xi=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i=1.3$		$E\xi^2=\sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i=3.2$
			$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=1.51$		

მაგალითი 23. დავუშვათ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე სიმეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ, ე. ი. $E\xi=0$. ვთქვათ, $\eta=\xi^2$. მაშინ $E(\xi\eta)=E(\xi^3)=0$, ვინაიდან ξ^3 აგრეთვე, სიმეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ. მეორეს მხრივ, $E\xi E\eta=0$, ვინაიდან $E\xi=0$. ამიტომ:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{E(\xi\eta)-E\xi E\eta}{\sigma\xi\sigma\eta}=0.$$

ე. ი. კორელაცია (და, მაშასადამე, კოვარიაცია) შეიძლება იყოს ნული, მაშინაც კი როცა შემთხვევითი სიდიდეები დამოკიდებულია.

მაგალითი 24. დავუშვათ, რომ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

η / ξ	1	2	
1	1/5	0	1/5
2	0	3/5	3/5
3	1/5	0	1/5
	2/5	3/5	

ცხადია, რომ:

$$E\xi=1\cdot1/5+2\cdot3/5+3\cdot1/5=2;\ E\eta=1\cdot2/5+2\cdot3/5=8/5;$$

$$E(\xi\eta)=1\cdot1\cdot1/5+2\cdot2\cdot3/5+3\cdot1\cdot1/5=16/5;\ E(\xi\eta)-E\xi E\eta=0.$$

აქედან გამომდინარე, კორელაციის კოეფიციენტი ნულია, მაშინ როდესაც (ისევე როგორც წინა მაგალითში) ნათელია, რომ ადგილი აქვს η შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ξ შემთხვევით სიდიდეზე.

მაგალითი 25. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ქვემოთ მოყვანილი ერთობლივი განაწილების კანონის მიხედვით გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი ρ(ξ,η).

η / ξ	1	2	3	
10	1/36	0	0	1/36
20	2/36	1/36	0	3/36
30	2/36	2/36	2/36	6/36
40	1/36	9/36	16/36	26/36
	6/36	12/36	18/36	

$E\xi = 10\cdot 1/36 + 20\cdot 3/36 + 30\cdot 6/36 + 40\cdot 26/36 \approx 35.83$;

$E\eta = 1\cdot 6/36 + 2\cdot 12/36 + 3\cdot 18/36 \approx 2.3$;

$$D\xi = (10-35{,}83)^2\cdot 1/36 + (20-35.83)^2\cdot 3/36 + (30-35.83)^2\cdot 6/36 +$$

$$+(40-35{,}83)^2\cdot 26/36 \approx 57.64;\ \sigma\xi \approx 7.6;$$

$D\eta = (1-2{,}3)^2\cdot 6/36 + (2-2.3)^2\cdot 12/36 + (3-2.3)1^2\cdot 18/36 \approx 0.556$;

$\sigma\eta \equiv 0.746$;

$$E(\xi\eta) = 10\cdot 1\cdot 1/36 + 20\cdot 1\cdot 2/36 + 20\cdot 2\cdot 1/36 + 30\cdot 1\cdot 2/36 + 30\cdot 2\cdot 2/36 +$$

$$+30\cdot 3\cdot 2/36 + 40\cdot 1\cdot 1/36 + 40\cdot 2\cdot 9/36 + 40\cdot 3\cdot 16/36 = 86.94;$$

$\rho(\xi,\eta) = (6.94 - 2.3\cdot 35.83)/(7.6\cdot 0.746) \approx 0.8$.

თავი VI

დისკრეტულ განაწილებათა გამოყენებები

ბინომიალური განაწილება

- თუ ყოველ კონკრეტულ ცდას გააჩნია ორი შესაძლო შედეგი (წარმატება და მარცხი) და ისინი ურთიერთგამომრიცხავია;
- ტარდება ცდათა სასრული რაოდენობა – n;

- ყოველი ცდის შედეგი დამოუკიდებელია ყველა დანარჩენი ცდის შედეგისაგან;
- ცალკეულ ცდაში წარმატების p ალბათობა მუდმივია;

მაშინ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს წარმატებათა რაოდენობას n ცდაში უწოდებენ ბინომიალურ შემთხვევით სიდიდეს, აღნიშნავენ $Bi(n,p)$ სიმბოლოთი და მას აქვს შემდეგი განაწილების კანონი:

$$P\{Bi(n,p)=k\} \equiv P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

ამასთანავე, $E[Bi(n,p)] = np$; $D[Bi(n,p)] = np(1-p)$.

პუასონის განაწილება

$$P\{Po(\lambda)=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \ldots; \ E[Po(\lambda)] = \lambda; \ D[Po(\lambda)] = \lambda.$$

პუასონის განაწილება ადეკვატური მოდელია იმ ხდომილებებისათვის, რომლებიც:

- ხდებიან შემთხვევით სივრცეში ან დროში;
- ხდებიან ცალ-ცალკე (ერთდროულად მოხდენა არ შეიძლება);
- ხდებიან დამოუკიდებლად, და
- ხდებიან მუდმივი ინტენსივობით (ხდომილებათა რაოდენობა მოცემულ დროის ინტერვალში ამ ინტერვალის სიგრძის პროპორციულია).

მაგალითი 1. მოცემულია $\xi \cong Bi(8, \frac{1}{4})$. იპოვეთ: ა) $P\{\xi = 6\}$; ბ) $P\{\xi \le 2\}$; გ) $P\{\xi > 0\}$.

ამოხსნა.

ა) ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით, სადაც $n = 8$ და $p = \frac{1}{4}$.

გვაქვს: $P\{\xi = 6\} = C_8^6 \cdot (\frac{1}{4})^6 \cdot (\frac{3}{4})^2 = 28 \cdot (\frac{1}{4})^6 \cdot (\frac{3}{4})^2 = 0.00385 \approx 0.004$;

ბ) $P\{\xi \le 2\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} = C_8^0 \cdot (\frac{1}{4})^0 \cdot (\frac{3}{4})^8 + C_8^1 \cdot (\frac{1}{4})^1 \cdot (\frac{3}{4})^7 +$

$$+C_8^2\cdot(\frac{1}{4})^2\cdot(\frac{3}{4})^6=0.1001+0.2669+0.3114=0.6785\approx 0.679\,;$$

გ) გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$$P\{\xi>0\}=1-P\{\xi=0\}=1-C_8^0\cdot(\frac{1}{4})^0\cdot(\frac{3}{4})^8=1-0.1001=0.8998\approx 0.9\,.$$

მაგალითი 2. მოცემულია $\xi\cong Bi(3,\frac{1}{4})$. იპოვეთ $E\xi$ და $D\xi$.

ამოხსნა. $E\xi=np=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. $D\xi=np(1-p)=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$.

მაგალითი 3. მოცემულია $\xi\cong Bi(10,0.3)$. იპოვეთ:

ა) $E\xi$ და $D\xi$; ბ) $P\{E\xi-\sigma\xi<\xi<E\xi+\sigma\xi\}$.

ამოხსნა.

ა) $E\xi=np=10\cdot0.3=3$, $D\xi=np(1-p)=10\cdot0.3\cdot0.7=2.1$;

ბ) $$P\{E\xi-\sigma\xi<\xi<E\xi+\sigma\xi\}=P\{3-\sqrt{2.1}<\xi<3+\sqrt{2.1}\}=$$
$$=P\{3-1.44<\xi<3+1.44\}=P\{1.55<\xi<4.44\}=$$
$$=\{\xi=2\}+P\{\xi=3\}+P\{\xi=4\}=P\{\xi\le4\}-P\{\xi\le1\}=$$
$$=0.8497-0.1493=0.7004\approx0.7.$$

მაგალითი 4. მოცემულია $\xi\cong Bi(10,0.3)$. იპოვეთ: ა) $P\{\xi=2\}$; ბ) $P\{\xi\le2\}$; გ) $P\{\xi>2\}$; დ) $\{\xi=2\}$ ხდომილების ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ $\{\xi\le2\}$.

ამოხსნა. ა) $P\{\xi=2\}=C_{10}^2\cdot(0.2)^2\cdot(0.8)^8=0.302$;

ბ) $P\{\xi\le2\}=P\{\xi=0\}+P\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}=0.6778$;

გ) $P\{\xi>2\}=1-P\{\xi\le2\}=1-0.6778=0.3222$;

დ) უნდა მოიძებნოს $P\{\xi=2\,|\,\xi\le2\}$. პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$P\{\xi=2\,|\,\xi\le2\}=\frac{P\{(\xi=2)\bigcap(\xi\le2\}}{P\{\xi\le2\}}=$$
$$=\frac{P\{(\xi=2)\bigcap[(\xi=0)\bigcup(\xi=1)\bigcup(\xi=2)]\}}{P\{\xi\le2\}}=\frac{P\{\xi=2\}}{P\{\xi\le2\}}=\frac{0.302}{0.6778}=0.4456.$$

მაგალითი 5. ცნობილია, რომ $\xi \cong Bi(n, p)$, $E\xi = 24$ და $D\xi = 8$. იპოვეთ n და p.

ამოხსნა. ვინაიდან $E[Bi(n, p)] = np$ და $D[Bi(n, p)] = np(1-p)$, ამიტომ $24 = np$ და $8 = np(1-p) = 24(1-p)$. საიდანაც $1-p = 1/3$ ანუ $p = 2/3$. შესაბამისად, $n = 24/p = 24 \cdot 3/2 = 36$.

მაგალითი 6. ცნობილია, რომ $\xi \cong Bi(n, 0.6)$. ვიპოვოთ ცდათა ის მინიმალური რაოდენობა, რომლისთვისაც $P\{\xi \geq 1\} > 0.9$.

ამოხსნა. $P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - C_n^0 \cdot (0.6)^0 \cdot (0.4)^n = 1 - (0.4)^n > 0.9$. ამიტომ გვაქვს: $(0.4)^n < 0.1$, ანუ $n \ln(0.4) < \ln(0.1)$. აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $\ln(0.4)$ უარყოფითია, დავასკვნით, რომ $n > \dfrac{\ln(0.4)}{\ln(0.1)} = 2.51$. შესაბამისად, ცდათა საძიებელი მინიმალური რიცხვი იქნება $n = 3$.

მაგალითი 7 (ბანახის ამოცანა). ორი ყუთიდან თითოეულში მოთავსებულია n ასანთი. აგდებენ წესიერ მონეტას და მასზე გერბის მოსვლის შემთხვევაში ერთ ასანთს იღებენ I ყუთიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი II ყუთიდან. როგორია ალბათობა იმისა, რომ I ყუთის დაცარიელების შემთხვევაში II ყუთში დარჩება m ასანთი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A = {I ყუთის დაცარიელების შემთხვევაში II ყუთში დარჩება m ასანთი}, B_i = {ასანთი ამოღებულია i-ური ყუთიდან}, $i = 1,2$.

მონეტის სიმეტრიულობის გამო $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$. თუ I ყუთის დაცარიელების შემთხვევაში II ყუთში დარჩა m ასანთი, ეს იმას ნიშნავს, რომ მონეტის $2n-m$ აგდებისას n-ჯერ მოვიდა გერბი, ხოლო $(n-m)$-ჯერ კი საფასური, ანუ ცდის $(2n-m)$-ჯერ ჩატარებისას ხდომილება B_1 მოხდა n-ჯერ. შესაბამისად, ბერნულის ფორმულის თანახმად:

$$P(A) = C_{2n-m}^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n-m}} = C_{2n-m}^n \cdot \frac{1}{2^{2n-m}}.$$

მაგალითი 8. ქვემოთ მოყვანილ სიტუაციებში მიუთითეთ როდისაა პუასონის განაწილება ადეკვატური მოდელი:

ა) იმ ავტომობილების რიცხვი, რომლებიც გადაკვეთავენ ერთზოლიან ხიდს თავისუფალი მოძრაობის დროს 10 საათიდან 11 საათამდე;

ამ შემთხვევაში პუასონის განაწილება იქნება კარგი მოდელი, რადგანაც შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მანქანები ხიდს გადაკვეთავენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად და დროის შემთხვევით მომენტებში (მოძრაობა თავისუფალია), ორი მანქანა ერთდროულად ვერ გადაკვეთს ხიდს (ხიდი ერთზოლიანია) და საშუალოდ დროის მოცემულ ინტერვალში ხიდზე გავლილი მანქანების რაოდენობა დროის ინტერვალის პროპორციული იქნება;

ბ) იმ ავტომობილების რიცხვი, რომლებიც 9 საათიდან 10 საათამდე შედიან ქალაქის ცენტრის ავტოსადგომზე.

გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში პუასონის განაწილება ვერ იქნება კარგი მოდელი, განსაკუთრებით თუ ეს სამუშაო დღეა – ავტოსადგომზე იქნება რიგები და მანქანები ვერ იმოძრავებენ თავისუფლად და ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად;

გ) რადიაოქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა.

პუასონის განაწილება იქნება კარგი მოდელი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ გამოსხივება ხდება დამოუკიდებლად და შემთხვევით მომენტებში, ასევე ყოველი კონკრეტული გამოსხივება ერთნაწილაკიანია.

მაგალითი 9. რადიოაქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილებას საშუალოთი 5. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ წამში გამოსხივებული იქნება: ა) 0; ბ) 1; გ) 2; დ) 3 ან მეტი ნაწილაკი.

ამოხსნა. ξ იყოს შემთხვევითი სიდიდე: „რადიაქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა“, მაშინ პირობის თანახმად $\xi \cong Po(5)$. ვისარგებლოთ პუასონის განაწილების კანონითა და შესაბამისი ცხრილებით, მაშინ:

ა) $P\{\xi = 0\} = \dfrac{5^0}{0!}e^{-5} = 0.0067$;

ბ) $P\{\xi = 1\} = \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 0.0337$;

გ) $P\{\xi = 2\} = \frac{5^2}{2!}e^{-5} = 0.0842$;

დ) გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$$P\{\xi \geq 3\} = 1 - P\{\xi < 3\} = 1 - P\{\xi = 0\} - P\{\xi = 1\} - P\{\xi = 2\} =$$
$$= 1 - 0.0067 - 0.0337 - 0.0842 = 0.875 .$$

მაგალითი 10. ტაქსების ფირმაში ტაქსებზე შემოსული გამოძახებების რაოდენობა პუასონის კანონითაა განაწილებული, საშუალოდ 4 გამოძახება ყოველ 30 წუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) არც ერთი გამოძახება არ შემოვა 30 წუთში; ბ) ერთი გამოძახება შემოვა 1 საათში; გ) ორზე ნაკლები გამოძახება შემოვა 15 წუთში.

ამოხსნა. ა) ξ იყოს შემთხვევითი სიდიდე: „ტაქსების ფირმაში 30 წუთის განმავლობაში შემოსული გამოძახებების რაოდენობა“. მაშინ ცხადია, რომ $\xi \cong Po(4)$. შესაბამისად, გვაქვს:

$$P\{\xi = 0\} = \frac{4^0}{0!}e^{-4} = 0.0183;$$

ბ) η იყოს შემთხვევითი სიდიდე: „ტაქსების ფირმაში 1 საათის განმავლობაში შემოსული გამოძახებების რაოდენობა“. ვინაიდან, პირობიდან გამომდინარე, 1 საათში საშუალოდ 8 გამოძახება შემოვა, ამიტომ $\eta \cong Po(8)$. შესაბამისად,

$$P\{\eta = 1\} = \frac{8^1}{1!}e^{-8} = 0.0027 ;$$

გ) ანალოგიურად, თუ ς არის შემთხვევითი სიდიდე: „ტაქსების ფირმაში 15 წუთის განმავლობაში შემოსული გამოძახებების რაოდენობა“, მაშინ $\varsigma \cong Po(2)$. ამიტომ

$$P\{\varsigma < 2\} = P\{\varsigma = 0\} + P\{\varsigma = 1\} = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.406 .$$

მაგალითი 11. V მლ ტბის წყალში ორგანული ნაწილაკების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილების კანონს საშუალოთი $0.2V$. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) 50 მლ ტბის

წყალი შეიცავს 8-ზე ნაკლებ ორგანულ ნაწილაკს; ბ) 30 მლ ტბის წყალი შეიცავს 2-ზე მეტ ორგანულ ნაწილაკს; გ) 10 მლ ტბის წყალი შეიცავს ზუსტად 3 ორგანულ ნაწილაკს.

ამოხსნა. ა) $V=50$, $\lambda=0.2\cdot 50=10$, ე. ი. $\xi\cong Po(10)$. ვისარგებლოთ პუასონის დაგროვილი (კუმულატიური) ალბათობების ცხრილით:

$$P\{\xi<8\}=P\{\xi\le 7\}=0.2202\,;$$

ბ) $V=30$, $\lambda=0.2\cdot 30=6$, ე. ი. $\xi\cong Po(6)$. გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$$P\{\xi>2\}=1-P\{\xi\le 2\}=1-0.0619=0.938\,;$$

გ) $V=10$, $\lambda=0.2\cdot 10=2$, ანუ $\xi\cong Po(2)$. ამიტომ

$$P\{\xi=3\}=0.1804\,.$$

მაგალითი 12. სატელეფონო სადგურში საშუალოდ საათში შემოდის 540 გამოძახება. როგორია ალბათობა იმისა, რომ წუთში შემოვა ზუსტად 20 გამოძახება?

ამოხსნა. ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ სადგურში გამოძახებები შემოდის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად და ისინი ერთდროულად არ შემოდიან. ამასთანავე გამოძახებათა რაოდენობა დროის ინტერვალის სიგრძის პროპორციულია. ამოცანის პირობის თანახმად სადგურში წუთში საშუალოდ შემოდის 540/60 = 9 გამოძახება. შესაბამისად, საქმე გვაქვს პუასონის განაწილებასთან პარამეტრით 9. ამიტომ საძიებელი ალბათობა პუასონის ფორმულით:

$$P\{Po(9)=20\}=\frac{9^{20}}{20!}\cdot e^{-20}\,,$$

რომელიც პუასონის განაწილების ცხრილის გამოყენებით მოგვცემს, რომ

$$P\{Po(9)=20\}=0.0006.$$

მაგალითი 13. აეროპორტში წუთში საშუალოდ ჯდება 3 თვითმფრინავი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 2 წუთში აეროპორტში დაჯდება არანაკლებ 4 თვითმფრინავი?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად 2 წუთში აეროპორტში საშუალოდ დაჯდება 6 თვითმფრინავი. შესაბამისად, ჩვენ

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ საქმე გვაქვს პუასონის განაწილებასთან პარამეტრით 6. შემოვიღოთ ხდომილებები: A ={დაჯდა არანაკლებ 4}; A_i = {დაჯდა i}, $i = 0,1,2,3$. ცხადია, რომ A_i ხდომილებები უთავსებადებია და $\overline{A} = \bigcup_{i=0}^{3} A_i$. ამიტომ $P(\overline{A}) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i)$.

თითოეული $P(A_i)$ ალბათობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ პუასონის ფორმულით:

$$P(A_i) = P\{Po(6) = i\} = \frac{6^i}{i!} \cdot e^{-6},\ i = 0,1,2,3.$$

პუასონის განაწილების ცხრილის გამოყენებით ადვილად დავინახავთ, რომ: $P(A_0) = 0.0025$, $P(A_1) = 0.0149$, $P(A_2) = 0.0446$ და $P(A_3) = 0.0892$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 0.1512$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.8488$.

მაგალითი 14. 5-მა ადამიანმა გაძარცვა ბანკომატი. თვითმხილველმა შენიშნა, რომ მძარცველები ჩასხდნენ ავტობუსში, რომელიც მიდიოდა მეზობელ ქალაქში. როგორც კი ავტობუსი ჩავიდა მეზობელ ქალაქში, მის კარებთან გაჩნდა პატრული და აუკრძალა მძღოლს კარების გაღება. მძღოლმა თქვა, რომ ავტობუსში 40 მგზავრია და ყველას შემოწმება ბევრ დროს მოითხოვდა. პატრულმა იგი დაამშვიდა: „ჩემთვის საკმარისია მხოლოდ 6 მგზავრის შემოწმება და მერე თქვენ შეგიძლიათ გააგრძელოთ გზა“. მან შემთხვევით შეარჩია 6 მგზავრი და წაიყვანა შესამოწმებლად. რითი ხელმძღვანელობდა პატრული?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

A = {შემთხვევით შერჩეულ 6 მგზავრს შორის ერთი მაინც მძარცველია},

A_i ={შემთხვევით შერჩეულ 6 მგზავრს შორის i მძარცველია}, i = 1,..,5.

ცხადია, რომ $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ და

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5),$$

სადაც თითოეული $P(A_i)$ უნდა გამოვთვალოთ ჰიპეგეომეტრი-ული განაწილების მიხედვით:

$$P(A_i) = \frac{c_5^i \cdot c_{35}^{5-i}}{c_{40}^6}.$$

მარტივი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ, რომ: $P(A_1) \approx 0.4192$, $P(A_2) \approx 0.1364$, $P(A_3) \approx 0.017$, $P(A_4) \approx 0.0008$, $P(A_5) \approx 0.00001$.

შესაბამისად, $P(A) \approx 0.5734$. ანუ ალბათობა იმისა, რომ 6 მგზავრს შორის აღმოჩნდება ერთი მაინც მძარცველი 1/2-ზე მე-ტია და ეტყობა, რომ პატრული ერკვეოდა ალბათობის თეორიაში.

თავი VII

უწყვეტი ტიპის განაწილებები

ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის,** თუ მისი განაწილების ფუნქცია – $F_\xi(x) := P\{\xi \le x\}$ უწყვეტია. თუ განაწი-ლების ფუნქცია წარმოიდგინება $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$ სახით, მაშინ $f_\xi(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის **გა-ნაწილების სიმკვრივე.** სიმკვრივეს აქვს შემდეგი თვისებები:

ა) $f(x) \ge 0$ ყოველი x-სათვის;

ბ) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;

გ) $P\{\xi \in \langle a,b\rangle\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int\limits_a^b f_\xi(x)dx$, სადაც $\langle a,b\rangle$ არის ნებისმიერი (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ ინტერვალებიდან.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მედიანა** Me არის ის მნიშვნელობა, რომელიც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებულ ფართობს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად. მათემატიკურად ის ასე განიმარტება:

$$P\{\xi \le Me\} = F_\xi(Me) = \int\limits_{-\infty}^{Me} f_\xi(x)dx = \frac{1}{2}.$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის p **-კვანტილი** ეწოდება ისეთ x_p მნიშვნელობას, რომელ მნიშვნელობამდეც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებული ფართობი p -ს ტოლია:

$$P\{\xi \le x_p\} = F_\xi(x_p) = \int\limits_{-\infty}^{x_p} f_\xi(x)dx = p.$$

გასაგებია, რომ $x_{0.5} = Me$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **ქვედა კვარტილი** Q_1 (შესაბამისად, **ზედა კვარტილი,** Q_3) ეწოდება $\frac{1}{4}$ -კვანტილს (შესაბამისად, $\frac{3}{4}$ -კვანტილს).

სხვაობას $Q_3 - Q_1$ **კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი** ეწოდება.

განაწილების $(1-\alpha)$ -კვანტილს **ზედა** α **-კრიტიკული წერტილი** ეწოდება.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მოდა** Mo ეწოდება არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, სადაც სიმკვრივე აღწევს მაქსიმუმს: $f_\xi(Mo) = \max\limits_x f_\xi(x)$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი (ანუ საშუალო)** განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E\xi = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x)dx .$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **დისპერსია** გამოითვლება ფორმულით:

$$D\xi = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x)dx - \mu^2 .$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი a გამოითვლება ფორმულით:

$$a = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f_{\xi}(x)dx .$$

ექსცესის კოეფიციენტი e ტოლია:

$$e = \frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^4 f_{\xi}(x)dx - 3 .$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & \text{თუ } 1 \le x \le 2; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

ა) შეამოწმეთ, რომ $f_{\xi}(x)$ აკმაყოფილებს სიმკვრივის *ა* და *ბ* თვისებას;

ბ) გამოთვალეთ $P\{1.5 \le \xi \le 2\}$.

ამოხსნა. ა) $f(x) \ge 0$ ყოველი x-სათვის, ვინაიდან $\frac{2}{3}x > 0$, როცა $x > 0$; გარდა ამისა,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)dx = \int_{1}^{2} \frac{2}{3}xdx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\cdot(2^2 - 1^2) = 1 .$$

ბ) $P\{1.5 \le \xi \le 2\} = \int\limits_{1.5}^{2} f_\xi(x)dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} |_{1.5}^{2} =$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2^2 - 1.5^2) = \frac{1}{3} \cdot 1.75 = 0.583 .$$

მაგალითი 2. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილე-ბის სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} k(1+x^2), & \text{თუ } -1 \le x \le 1; \\ 0, & \text{სხვაგან,} \end{cases}$$

სადაც k მუდმივია. იპოვეთ: ა) k ; ბ) $P\{0.3 \le \xi \le 0.6\}$; გ) $P\{|\xi| \le 0.2\}$.

ამოხსნა. ა) ვისარგებლოთ სიმკვრივის *2* თვისებით:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} k(1+x^2)dx = k(x + \frac{1}{3}x^3) |_{-1}^{1} =$$

$$= k(1 + \frac{1}{3} \cdot 1^3) - k[(-1) + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3] = k \cdot \frac{4}{3} - k \cdot (-\frac{4}{3}) = \frac{8k}{3} ,$$

ე. ი. $\frac{8k}{3} = 1$. საიდანაც $k = 3/8$;

ბ) $P\{0.3 \le \xi \le 0.6\} = \int\limits_{0.3}^{0.6} \frac{3}{8}(1+x^2)dx = \frac{3}{8}(x + \frac{1}{3}x^3) |_{0.3}^{0.6} =$

$$= \frac{3}{8}(0.6 + \frac{1}{3} \cdot 0.6^3) - \frac{3}{8}(0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.3^3) = 0.136 ;$$

გ) $P\{|\xi| < 0.2\} = P\{-0.2 < \xi < 0.2\} = \int\limits_{-0.2}^{0.2} \frac{3}{8}(1+x^2)dx = \frac{3}{8}(x + \frac{1}{3}x^3) |_{-0.2}^{0.2} =$

$$= \frac{3}{8}(0.2 + \frac{1}{3} \cdot 0.2^3) - \frac{3}{8}[-0.2 + \frac{1}{3} \cdot (-0.2)^3] = 0.152 .$$

მაგალითი 3. სავაჭრო ცენტრის გამყიდველთა წლიური ხელ-ფასი ξ, გაზომილი 1000 ლარებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} cx^{-7/2}, & \text{თუ } x \ge 16; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c-ს მნიშვნელობა; ბ) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული გამყიდველის წლიური ხელფასი მოთავსებულია 20 000 ლარსა და 30 000 ლარს შორის.

ამოხსნა.

ა) $1=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx=\int_{16}^{\infty} cx^{-7/2}dx=-\frac{2}{5}\cdot cx^{-5/2}\,|_{16}^{\infty}=(-0)-(-\frac{2}{5}\cdot c\cdot 16^{-5/2})=\frac{c}{2560}$,

საიდანაც $c=2560$;

ბ) $P\{20\le\xi\le 30\}=\int_{20}^{30} 2560x^{-7/2}dx=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot x^{-5/2}\,|_{20}^{30}=$

$$=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 30^{-5/2}-2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 20^{-5/2}=0.365\,.$$

მაგალითი 4. 100 000 ლიტრებში გაზომილი ბენზინის ყოველკვირეული გაყიდვები ξ აღიწერება ორი A და B მოდელით. A მოდელის მიხედვით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}2x, & \text{თუ } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან},\end{cases}$$

ხოლო B მოდელის თანახმად:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}12x^3(1-x^2), & \text{თუ } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

ა) იპოვეთ პირველი მოდელის მედიანა M_A; ბ) აჩვენეთ, რომ მეორე მოდელსაც იგივე მედიანა აქვს, $M_B=M_A$.

ამოხსნა. ა) განმარტების თანახმად:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M_A} f_\xi(x)dx=\int_0^{M_A} 2xdx=2\cdot\frac{x^2}{2}\,|_0^{M_A}=(M_A)^2\,.$$

ამიტომ $M_A=\sqrt{1/2}$;

ბ) ანალოგიურად:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M_B} f_\xi(x)dx=\int_0^{M_B} 12x^3(1-x^2)dx=(3x^4-2x^6)\,|_0^{M_B}=$$

$$=3\cdot(M_B)^4-2\cdot(M_B)^6=(M_B)^4\cdot[3-2\cdot(M_B)^2].$$

გავიხსენოთ, რომ $(M_A)^2=\dfrac{1}{2}$. მეორე მხრივ, რადგანაც $(\dfrac{1}{2})^2\cdot[3-2\cdot\dfrac{1}{2}]=\dfrac{1}{4}\cdot 2=\dfrac{1}{2}$, ამიტომ ცხადია, რომ $M_B=M_A=\sqrt{1/2}$.

მაგალითი 5. მე-3 მაგალითში გამოთვალეთ წლიური ხელფასის: ა) მედიანა; ბ) ქვედა და ზედა კვარტილები; გ) მოდა; დ) მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. ა) გვაქვს:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M}f_{\xi}(x)dx=\int_{16}^{M}2560x^{-7/2}dx=2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\Big|_{16}^{M}=-1024M^{-5/2}+1.$$

ამიტომ მედიანისათვის ვღებულობთ განტოლებას:

$$-1024M^{-5/2}+1=1/2.$$

საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ $M^{5/2}=2048$, ანუ $Me=21.1$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მედიანა იქნება $21.1\cdot1000=21100$ ლარი;

ბ) განმარტების თანახმად:

$$\frac{1}{4}=\int_{-\infty}^{Q_1}f_{\xi}(x)dx=\int_{16}^{Q_1}2560x^{-7/2}dx=2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\Big|_{16}^{Q_1}=-1024Q_1^{-5/2}+1.$$

შესაბამისად, ქვედა კვარტილისათვის გვაქვს განტოლება: $-1024Q_1^{-5/2}+1=1/4$, საიდანაც გვაქვს: $Q_1=(1024\cdot\dfrac{4}{3})^{2/5}=18$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ ზედა კვარტილი $Q_3=27.9$;

გ) ვინაიდან სიმკვრივე კლებადი ფუნქციაა ინტერვალზე $[16,+\infty)$, ამიტომ მოდა იქნება $Mo=16$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მოდაა $16\cdot1000=16000$ ლარი.

დ) განმარტების თანახმად:

$$\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\xi}(x)dx=\int_{16}^{\infty}x\cdot2560x^{-7/2}dx=\int_{16}^{\infty}2560x^{-5/2}dx=$$

$$= 2560 \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot x^{-3/2} \Big|_{16}^{\infty} = 0 - 2560 \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot 16^{-3/2} \Big|_{16}^{\infty} = 26\frac{2}{3}.$$

ე. ი. გამყიდველთა ხელფასის საშუალოა $26\frac{2}{3} \cdot 1000 = 26700$ ლარი.

შევნიშნავთ, რომ საშუალო მეტია მედიანაზე, ვინაიდან განაწილება დადებითად ასიმეტრიულია.

მაგალითი 6. გამოთვალეთ მოდა მე-4 მაგალითის B მოდელში.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ სიმკვრივე და გავუტოლოთ ნულს:

$$[12x^3(1-x^2)]' = 36x^2 - 60x^4 = 12x^2(3-5x^2) = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია: 0, $-\sqrt{3/5}$ და $\sqrt{3/5}$, რომელთაგან $0 \le x \le 1$ შუალედში ვარდება მხოლოდ $\sqrt{3/5}$ და აქ $12x^3(1-x^2)$ ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს. შესაბამისად, მოდა არის $\sqrt{3/5} = 0.775$. ამიტომ გაყიდული ბენზინის მოდაა:

$$0.775 \cdot 100\,000 = 77\,500 \text{ ლიტრი.}$$

მაგალითი 7. ბენზინგასამართი სადგურის ყოველკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე ξ გაზომილი 1000 ლიტრებში მოდელირდება სიმკვრივის ფუნქციით:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 120x^2(1-x), & \text{თუ } 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

გამოთვალეთ საშუალოკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე.

ამოხსნა. განმარტების თანახმად:

$$\mu = E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_0^1 x \cdot 120x^2(1-x)dx = 120 \cdot \int_0^1 (x^3 - x^4)dx =$$

$$= (30x^4 - 24x^5)\Big|_0^1 = 30 - 24 = 6.$$

შესაბამისად, ბენზინგასამართი სადგურის საშუალო მოთხოვნა ბენზინზე კვირაში შეადგენს: $6 \cdot 1000 = 6000$ ლიტრს.

მაგალითი 8. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილე-ბის სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\cdot x(2-x), & \text{თუ } 0 \le x \le 2; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ: ა) საშუალო; ბ) დისპერსია; გ) $P\{\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma\}$.

ამოხსნა.

ა) $\mu = E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_0^2 x\cdot\frac{3}{4}\cdot x(2-x)dx = \int_0^2 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3)dx =$

$$= (\frac{x^3}{2} - \frac{3x^4}{16})|_0^2 = 4-3=1;$$

ბ) $\sigma^2 = D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \mu^2 = \int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{4}\cdot x(2-x)dx - 1^2 =$

$$= \int_0^2 (\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4)dx - 1 = (\frac{3x^4}{8} - \frac{3x^5}{20})|_0^2 - 1 = (6-\frac{24}{5}) - 0 - 1 = \frac{1}{5} = 0.2\ ;$$

გ) $P\{\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma\} = P\{1-\sqrt{0.2}<\xi<1+\sqrt{0.2}\} =$

$$= \int_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}} \frac{3}{4}\cdot x(2-x)dx = \int_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}} (\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx = (\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4})|_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}} =$$

$$= (\frac{3\cdot(1+\sqrt{0.2})^2}{4} - \frac{(1+\sqrt{0.2})^3}{4}) - (\frac{3\cdot(1-\sqrt{0.2})^2}{4} - \frac{(1-\sqrt{0.2})^3}{4}) =$$

$$= (\frac{3\cdot(1.447)^2}{4} - \frac{(1.447)^3}{4}) - (\frac{3\cdot(0.552)^2}{4} - \frac{(0.552)^3}{4}) = 0.626.$$

მაგალითი 9. მოცემულია განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \cos x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ფორმულით: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$.

თუ $x \le 0$, მაშინ $f(x)=0$. შესაბამისად, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0du=0$;

თუ $0<x\le \pi/2$, მაშინ $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{x}\cos udu=\sin x$;

თუ $x>\pi/2$, მაშინ $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{\pi/2}\cos udu+\int_{\pi/2}^{x} 0du=\sin x\big|_{0}^{\pi/2}=1$.

საბოლოოდ გვაქვს: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

თავი VIII
ნორმალური განაწილება

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **ნორმალური** და აღინიშნება სიმბოლოთი $N(a,\sigma^2)$, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს (შესაბამისად, განაწილების ფუნქციას) აქვს სახე:

$$f_{N(a,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ (შესაბამისად, } F_{N(a,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt\text{)}.$$

$$EN(\alpha,\sigma^2)=MoN(\alpha,\sigma^2)=MeN(\alpha,\sigma^2)=a \text{ და } DN(\alpha,\sigma^2)=\sigma^2 .$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ($N(0,1)$) სიმკვრივე (შესაბამისად, განაწილების ფუნქცია) აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\varphi(x):=f_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (შესაბამისად, } \Phi(x):=F_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt;$$

გარდა ამისა, იხმარება აღნიშვნა: $\Phi_0(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

ცხადია, რომ: $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$; $\Phi(x)=0.5+\Phi_0(x)$, $x>0$; $\frac{N(a,\sigma^2)-a}{\sigma}=N(0,1)$; $P\{N(0,1)\in\langle c,d\rangle\}=\Phi(d)-\Phi(c)$;

$$P\{N(a,\sigma^2)\in\langle c,d\rangle\}=\Phi(\frac{d-a}{\sigma})-\Phi(\frac{c-a}{\sigma}); \quad x_p^{a,\sigma^2}=\sigma\cdot x_p^{0.1}+a;$$

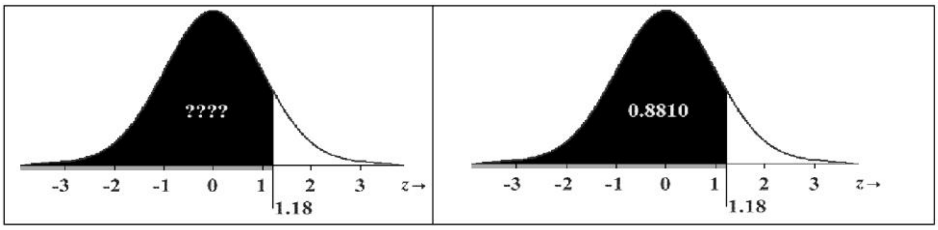
$x_p^{0.1}=\frac{x_p^{a,\sigma^2}-a}{\sigma}$, სადაც x_p^{a,σ^2} **არის** $N(a,\sigma^2)$**-ის** p **-კვანტილი;**

Z **მნიშვნელობა:** $Z=(N(a,\sigma^2)-a)/\sigma$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია 1.18-ზე, $P(N(0,1)<1.18)$?

ამოხსნა. დავხაზოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის წირი და აბსცისთა ღერძზე ავღნიშნოთ 1.18-ის შესაბამისი წერტილი (ამ შემთხვევაში $z=1.18$).



ნორმალური განაწილების ცხრილის პირველ სვეტში მოვძებნოთ რიცხვი 1.1, ხოლო პირველ სტრიქონში კი – რიცხვი .08.

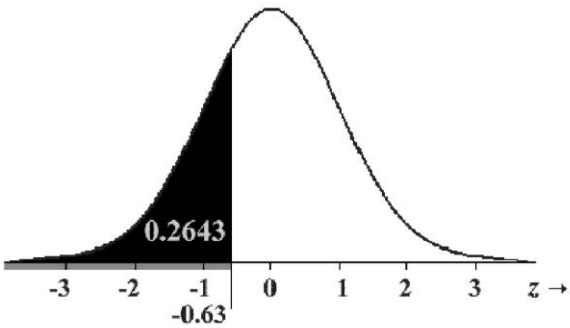
1.1-ის შესაბამისი სტრიქონისა და .08-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე ვპოულობთ რიცხვს – 0.8810. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$P(N(0,1)<1.18)=0.8810$ ანუ 88.10%.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია -0.63-ზე, $P(N(0,1)<-0.63)$?

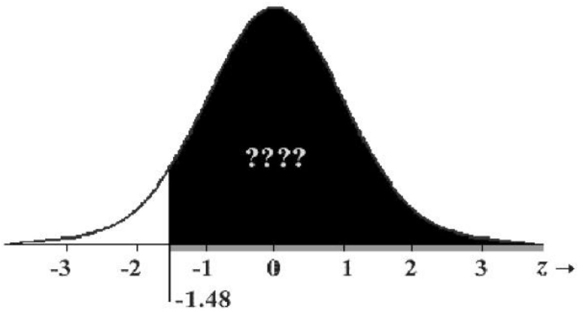
ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $z=-0.63$ და საძიებელი ალბათობა იქნება

$P(N(0,1)<-0.63)=P(N(0,1)>0.63)=1-\Phi(0.63)=1-0.7357=0.2643$ ანუ 26.43%.



მაგალითი 3. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე მეტია -1.48-ზე, $P(N(0,1) > -1.48)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $z = -1.48$ და გამოსათვლელია ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ -1.48-ის მარჯვნივ მოთავსებული არის ფართობი.

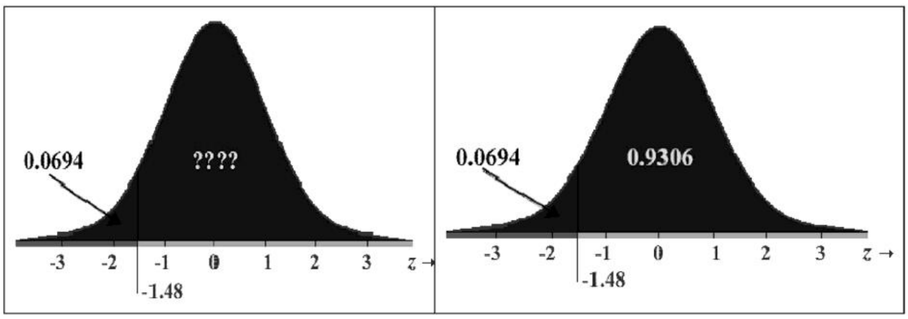


თუ ვისარგებლებთ ნორმალური განაწილების სიმეტრიულობითა და $\Phi(z)$ ფუნქციის ცხრილებით, მივიღებთ:

$$P(N(0,1) > -1.48) = P(N(0,1) < 1.48) = \Phi(1.48) = 0.9306.$$

შენიშვნა. შეგვიძლია ვისარგებლოთ საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით და მაშინ მაგალითი დაიყვნება წინა მაგალითზე:

$$P(N(0,1) > -1.48) = 1 - P(N(0,1) \le -1.48) = 1 - P(N(0,1) < -1.48) =$$
$$= 1 - 0.0694 = 0.9306.$$

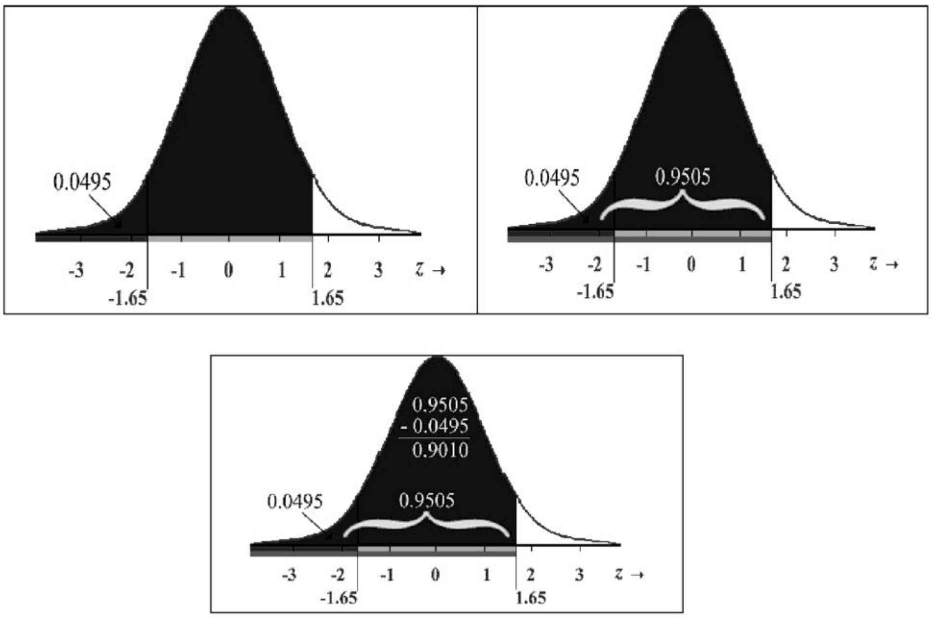


მაგალითი 4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე მოთავსებულია შუალედში -1.65-სა და 1.65-ს შორის, $P(-1.65 < N(0,1) < 1.65)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში საძიებელი ალბათობა იქნება;

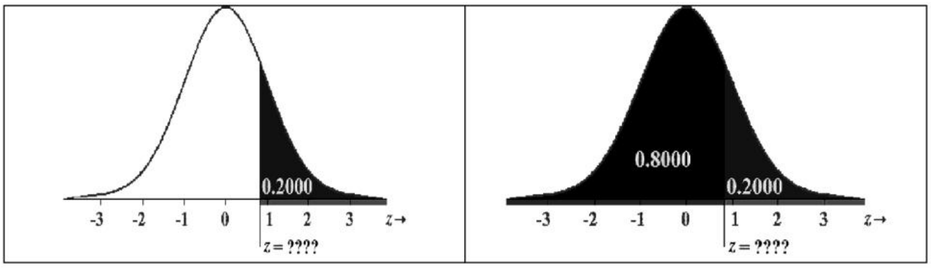
$$P(-1.65 < N(0,1) < 1.65) = \Phi(1.65) - \Phi(-1.65) =$$
$$= \Phi(1.65) - [1 - \Phi(1.65)] = 2\Phi(1.65) - 1 = 2 \times 0.9505 - 1 = 0.9010.$$

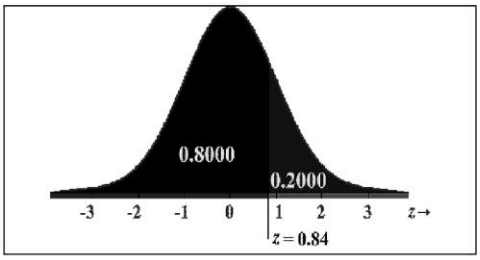
შევნიშნავთ, რომ ამოხსნის პროცედურები სქემატურად გამოსახულია ქვემოთ მოყვანილ სამ ნახაზზე:



მაგალითი 5. ვიპოვოთ z-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის მარჯვნივ სტანდარტული ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 0.2000-ის?

ამოხსნა. ცხადია, რომ ეს ამოცანა ტოლფასია z-ის ისეთი მნიშვნელობის მოძებნის, რომლის მარცხნივ ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 1-0.2000=0.8000-ის. ნორმალური განაწილების ცხრილში ვპოულობთ 0.8000-სთან ყველაზე ახლოს მდგომ რიცხვს – 0.7995-ს. ეს რიცხვი დგას 0.8-ის შესაბამისი სტრიქონისა და 0.4-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე. ამიტომ გასაგებია, რომ z-ის საძიებელი მნიშვნელობაა $z = 0.84$.





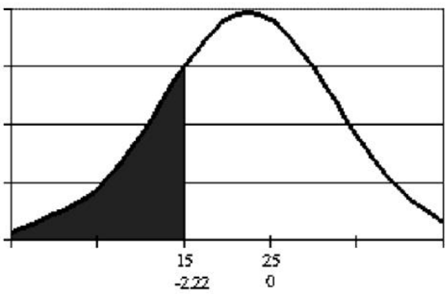
მაგალითი 6. დავუშვათ, რომ ავტომობილის დაზიანების შემთხვევაში ავარიულ გამოძახებაზე რეაგირების საშუალო დრო არის 25 წუთი. ჩავთვალოთ, რომ ეს სიდიდე განაწილებულია დაახლოებით ნორმალურად და მისი სტანდარტული გადახრა ტოლია 4.5 წუთის. შემთხვევით შერჩეულ იქნა 80 გამოძახება. დაახლოებით რამდენ მათგანზე მოხდება რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში?

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოსახსნელად ვიპოვოთ ნორმალური წირის ქვეშ 15-ის მარცხნივ მდებარე არის ფართობი.

ნაბიჯი 1. დავხაზოთ გრაფიკი და მოვნიშნოთ საძიებელი არე.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ 15-ის z მნიშვნელობა:

$$z=\frac{X-EX}{\sigma X}=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{15-25}{4.5}=-\frac{10}{4.5}=-2.22\,.$$



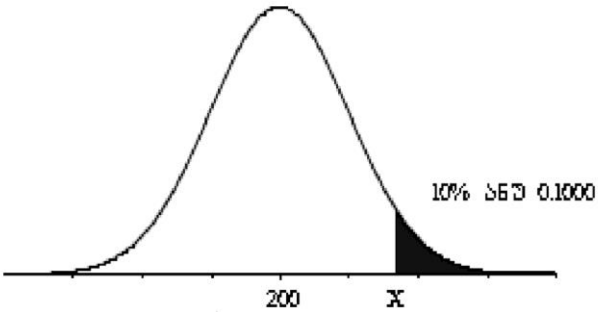
ნაბიჯი 3. ვიპოვოთ $z=-2.22$-სა და $z=0$-ს შორის მდებარე არის ფართობი. ის ტოლია 0.4868-ის.

ნაბიჯი 4. გამოვაკლოთ 0.5000-ს 0.4868. მივიღებთ 0.0132-ს.

ნაბიჯი 5. იმისათვის, რომ გავიგოთ რამდენ გამოძახებაზე მოხდა რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში, გავამრავლოთ შერჩევის მოცულობა (80) მიღებულ ფართობზე (0.0132). მაშინ მივიღებთ 1.056-ს. მაშასადამე, 1.056 ანუ დაახლოებით ერთ გამოძახებაზე მოხდება რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში.

მაგალითი 7. ცნობილია, რომ აბიტურიენტების მხოლოდ 10% შეიძლება გახდეს სტუდენტი. ჩავთვალოთ, რომ აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი 200 და სტანდარტული გადახრით 20. ვიპოვოთ ის მინიმალური ქულა, რომელიც საჭიროა რათა აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი.

ამოხსნა. ვინაიდან აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული, ამიტომ იმ ქულის მნიშვნელობა (X), რომლის ზევითაც აბიტურიენტი გახდება სტუდენტი, არის ისეთი რიცხვი, რომლის მარჯვნივ ნორმალური წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 10%-ის ანუ 0.1000-ის:



ნაბიჯი 1. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნორმალური წირის ქვეშ 200-სა და X-ს შორის მდებარე არის ფართობი 0.5000-ს გამოვაკლოთ 0.1000, მივიღებთ 0.4000-ს.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ z მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ნორმალური განაწილების ცხრილში 0.4000-ს. იმ შემთხვევაში, როცა ცხრილში არ იძებნება ზუსტად ეს მნიშვნელობა ვიღებთ მასთან ყველაზე ახლოს მყოფს, ამ შემთხვევაში 0.3997-ს. შესაბამისი $z = 1.28$.

ნაბიჯი 3. შევიტანოთ 1.28 z მნიშვნელობის გამოსათვლელ ფორმულაში $z=(X-\mu)/\sigma$ და ამოვხსნათ X .

$$1.28=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$1.28\times 20+200=X$$

$$X=25.60+200=225.60$$

$$X=226\,.$$

ე.ი. იმისათვის, რომ აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი, მან უნდა მოაგროვოს 226 ქულა.

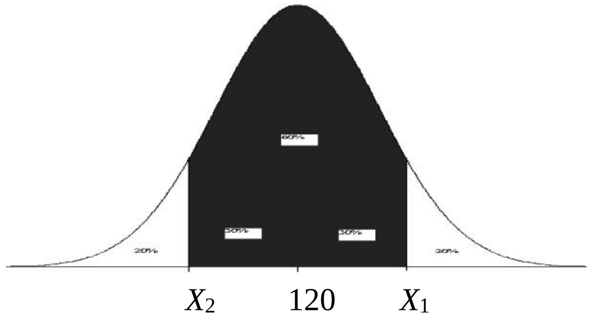
შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, როცა ფართობის მნიშვნელობა ვარდება ცხრილის ორი მნიშვნელობის ზუსტად შუაში, მაშინ ვიღებთ მათი შესაბამისი **z** მნიშვნელობებიდან უფრო დიდს. მაგალითად, თუ ფართობის მნიშვნელობაა 0.4500, ის იმყოფება 0.4495-ისა და 0.4505-ის შუაში და **z** მნიშვნელობად ვიღებთ 1.65-ს და არა 1.64-ს.

საწყისი მნიშვნელობის გამოთვლა z **მნიშვნელობის მიხედვით:**

$$X=z\cdot\sigma+\mu\,.$$

მაგალითი 8. სამედიცინო გამოკვლევის მიზნით მკვლევარს სურს შეარჩიოს არტერიული წნევის საფუძველზე შედგენილი პოპულაციის შუაში მდგომი ადამიანების 60%. ვიგულისხმოთ, რომ არტერიული წნევა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 120 და სტანდარტული გადახრით 8. დავადგინოთ შესარჩევი ადამიანების არტერიული წნევის ზედა და ქვედა საზღვარი.

ამოხსნა. გასაგებია, რომ შესარჩევი ადამიანების არტერიული წნევის ზედა და ქვედა საზღვარი იქნება ის ორი მოპირდაპირე რიცხვი, რომელთა გარეთ ნორმალური წირის ქვეშ მოქცეული თითოეული კუდის ფართობია 20%.



ცხადია, რომ z მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ნორმალური განაწილების ცხრილში 0.5000-0.2000=0.3000 ფართობს ტოლია 0.84-ის. შევიტანოთ იგი $X = z \cdot \sigma + \mu$ ფორმულაში. მივიღებთ, რომ

$$X_1 = z \cdot \sigma + \mu = 0.84 \times 8 + 120 = 126.72 .$$

მეორეს მხრივ, სტანდარტული ნორმალური განაწილების საშუალოს მიმართ სიმეტრიულობის გამო X_2-ის გამოსათვლელად უნდა ავიღოთ $z = -0.84$. შესაბამისად გვექნება:

$$X_2 = z \cdot \sigma + \mu = -0.84 \times 8 + 120 = 113.28 .$$

ე. ი. მკვლევარმა უნდა შეარჩიოს ისეთი ადამიანები, რომელთა არტერიული წნევა მერყეობს 113.8-სა და 126.72-ს შორის,

$$113.28 < X < 126.72 .$$

მაგალითი 9. მოცემულია $\xi \cong N(23, \sigma^2)$ და $P\{\xi < 27\} = 0.83$. იპოვეთ σ.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $Z = \dfrac{\xi - 23}{\sigma} \cong N(0,1)$. გარდა ამისა, ხდომილებები $\{\xi < 27\}$ და $\{\dfrac{\xi - 23}{\sigma} < \dfrac{27-23}{\sigma}\}$ ეკვივალენტურია. ამიტომ

$$P\{\xi < 27\} = P\{\frac{\xi - 23}{\sigma} < \frac{27-23}{\sigma}\} = P\{Z < \frac{4}{\sigma}\} = 0.83 ,$$

ანუ $\Phi(\dfrac{4}{\sigma}) = 0.83$. საიდანაც, მაგალითი 5-ის ანალოგიურად:

$\dfrac{4}{\sigma} = 0.9542$ და, შესაბამისად, $\sigma = \dfrac{4}{0.9542} = 4.19$.

მაგალითი 10. მას შემდეგ რაც ნიკა ჩამოსვამს ეკას მანქანიდან ქალაქის ცენტრალურ ფოსტასთან, ის მოძრაობს ქალაქში და გარკვეული დროის შემდეგ ბრუნდება ეკას წასაყვანად. ნიკას ვარაუდით ეკას მიერ ფოსტაში გატარებული დრო დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი 6 წუთი და სტანდარტული გადახრით 1.3 წუთი. რამდენი წუთის შემდეგ

უნდა დაბრუნდეს ნიკა ფოსტასთან, რომ არ მოუწიოს ლოდინი სულ ცოტა 95%-იანი გარანტიით.

ამოხსნა. T იყოს ეკას მიერ ფოსტაში გატარებული დრო. მაშინ $T \cong N(6,1.3^2)$. t იყოს ფოსტასთან ეკას ჩამოსმიდან ნიკას უკან დაბრუნებამდე გასული დრო. მოსაძებნია ისეთი t, რომლისთვისაც: $P\{T \le t\} \ge 0.95$. ეს თანაფარდობა ტოლფასია: $P\{\frac{T-6}{1.3} \le \frac{t-6}{1.3}\} \ge 0.95$, ანუ $\Phi(\frac{t-6}{1.3}) \ge 0.95 = \Phi(1.645)$, საიდანაც გვაქვს: $\frac{t-6}{1.3} \ge 1.645$. აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ $t \ge 8.1385 \approx 8.14$. მაშასადამე, ნიკა არ უნდა დაბრუნდეს 8.14 წუთზე ადრე.

მაგალითი 11. ბიოლოგი აგროვებს მონაცემებს კონკრეტული სახეობის კაქტუსის სიმაღლის შესახებ. მისი დაკვირვებით კაქტუსების 34.25%-ის სიგრძე 12 სმ-ზე ნაკლებია, ხოლო 18.4%-ის სიგრძე 16 სმ-ზე მეტია. ბიოლოგმა დაუშვა, რომ სიმაღლე განაწილებულია ნორმალურად. ვიპოვოთ ამ განაწილების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

ამოხსნა. კაქტუსის სიმაღლე ავღნიშნოთ H-ით, $H \approx N(a,\sigma^2)$. მოსაძებნია a და σ. ბიოლოგის დაკვირვების თანახმად: $P\{H < 12\} = 0.342$ და $P\{H > 16\} = 0.184$. შესაბამისად,

$$\Phi(\frac{12-a}{\sigma}) = 0.342 \text{ და } \Phi(\frac{16-a}{\sigma}) = 1 - 0.184 = 0.816.$$

ამიტომ $\frac{12-a}{\sigma} = -0.407$ და $\frac{16-a}{\sigma} = 0.900$. საიდანაც ვასკვნით, რომ: $a = 13.2$ და $\sigma = 3.06$.

მაგალითი 12. სუპერმარკეტში დღის განმავლობაში გაყიდული ციტრუსების რაოდენობა მოდელირდება ნორმალური განაწილებით. აღმოჩნდა, რომ ხანგრძლივი პერიოდის მანძილზე დღეში საშუალოდ იყიდებოდა 35 კგ. ციტრუსი, ხოლო 15 კგ-ზე ნაკლები გაყიდულ იქნა საშუალოდ ყოველი 20 დღიდან ერთ დღეში. ა) გამოთვალეთ გაყიდვების სტანდარტული გადახრა σ; ბ) ცნობილია, რომ კონკრეტულ დღეს გაიყიდა 53 კგ-ზე მეტი ციტრუსი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ დღეს გაიყიდა 56 კგ-ზე მეტი ციტრუსი.

ამოხსნა. დღეში გაყიდული ციტრუსების რაოდენობა აღვნიშნოთ ξ-თი. მაშინ: $\xi \cong N(35,\sigma^2)$ და $P\{\xi < 15\} = \frac{1}{20} = 0.05$.

ა) $P\{\xi < 15\} = 0.05 \Rightarrow \Phi(\frac{15-35}{\sigma}) = 0.05 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{15-35}{\sigma} = -1.6448 \Rightarrow \sigma = 12.2;$$

ბ) $P\{\xi > 56 \mid \xi > 53\} = \frac{P\{(\xi > 56)\bigcap(\xi > 53)\}}{P\{\xi > 53\}} = \frac{P\{\xi > 56\}}{P\{\xi > 53\}} =$

$$= \frac{1-\Phi(\frac{56-35}{12.2})}{1-\Phi(\frac{53-35}{12.2})} = \frac{1-0.9574}{1-0.9299} = 0.608.$$

თავი IX

ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები

ჩებიშევის უტოლობა

ჩებიშევის უტოლობა აფასებს შემთხვევითი სიდიდის გადახრას თავისი მათემატიკური ლოდინიდან. თუ ξ რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \ge 1 - D\xi/\varepsilon^2.$$

დიდ რიცხვთა კანონი.

ჩებიშევის თეორემა. ვთქვათ, შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1, \xi_2, \ldots$ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია ($E\xi_i < \infty$) და არსებობს ისეთი რიცხვი C, რომ $D\xi_i \le C$, $i = 1, 2, \ldots$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის სრულდება თანაფარდობა:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}-\frac{E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_n}{n}|<\varepsilon\}=1.$$

ამ მტკიცებულებას **დიდ რიცხვთა კანონს** უწოდებენ.

ბერნულის თეორემა. დავუშვათ, m არის n დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი, ხოლო p არის A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ცალკეულ ექსპერიმენტში. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$P\{|\frac{m}{n}-p|\ge\varepsilon\}\le\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\ \ (\to 0\text{, როცა } n\to\infty).$$

ერთთან რაგინდ ახლოს მყოფი ალბათობით შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ დამოუკიდებელ ცდათა საკმაოდ დიდი რიცხვისათვის დაკვირვებადი ხდომილების მოხდენათა სიხშირე რაგინდ უმნიშვნელოდ განსხვავდება მისი მოხდენის ალბათობისაგან ცალკეულ ცდაში.

ცენტრალური ზღვარითი თეორემა.

დიდ რიცხვთა კანონი არ იკვლევს შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონის სახეს. ეს საკითხი შეისწავლება თეორემების ჯგუფში, რომლებსაც **ცენტრალური ზღვარითი თეორემა** ეწოდება. ეს თეორემა ამტკიცებს, რომ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონი, რომელთაგან ცალკეულ შესაკრებს შეიძლება ჰქონდეს განსხვავებული განაწილება, უახლოვდება ნორმალურს შესაკრებთა საკმაოდ დიდი რიცხვის შემთხვევაში. ამით აიხსნება ნორმალური განაწილების კანონის უაღრესად დიდი მნიშვნელობა პრაქტიკულ გამოყენებებში.

თეორემა 1. თუ $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა, ერთი და იმავე განაწილების კანონით, მათემატიკური ლოდინით a და დისპერსიით σ^2, მაშინ n –ის უსასრულოდ ზრდისას სტანდარტიზებლი $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ ჯამის განაწილების კანონი უახლოვდება სტანდარტულ ნორმალურ განაწილების კანონს:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n-na}{\sigma\sqrt{n}}\le x\}=\Phi(x)\,.$$

თეორემა 2 *(ლიაპუნოვის თეორემა).* თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ძალიან დიდი რიცხვის ჯამს, რომელთათვისაც შესრულებულია პირობა:

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} b_k)/[\left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right)^{3/2}]=0,$$

სადაც b_k – მესამე რიგის აბსოლუტური ცენტრალური მომენტია ξ_k შემთხვევითი სიდიდის , ხოლო D_k – მისი დისპერსია, მაშინ ξ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია განაწილება, რომელიც ახლოსაა ნორმალურ განაწილებასთან.

თუ შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს ურთიერთდამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ძალიან დიდი რაოდენობის ჯამს, რომელთაგან თითოეულის გავლენა ჯამზე მიზერულად მცირეა, მაშინ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია განაწილება, რომელიც ახლოსაა ნორმალურთან.

თეორემა 3 *(მუავრ-ლაპლასის თეორემა).* თუ ტარდება n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში A ხდომილება ხდება ალბათობით p, $np>15$, მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$p\left(\alpha<\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right)\approx\Phi(\beta)-\Phi(\alpha),$$

სადაც S_n – A ხდომილების მოხდენათა რიცხვია n ცდაში, $q=1-p$, ხოლო

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,.$$

შედეგი *(მუავრ-ლაპლასის ლოკალური თეორემა).* მუავრ-ლაპლასის თეორემის პირობებში $p_n(k)$ – ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება n ცდაში მოხდება ზუსტად k –ჯერ, ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში, თუ $np>15$, შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულით:

$$p_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

სადაც $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, ხოლო $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

მაგალითი 1. დადგენილია, რომ იმ ადამიანების 94%-ს, რომელთაც გაკეთებული აქვთ ტუბერკულიოზის საწინააღმდეგო აცრები, გამოუმუშავდება შესაბამისი იმუნიტეტი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 100000 ტუბერკულიოზზე აცრილი ადამიანიდან 5800 არაა დაცული ამ დაავადებისაგან?

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნა მართალია თეორიულად შესაძლებელია ბერნულის ფორმულით, სადაც $n = 100000$, $k = 5800$, $p = 0.06$, $q = 0.94$ და, შესაბამისად,

$$P_{100000}(5800) = C_{100000}^{5800}(0.06)^{5800} \cdot (0.94)^{94200},$$

მაგრამ პრაქტიკულად ამის გაკეთება ძალიან ძნელია. ამ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ლოკალური ფორმულით, რომელიც გვაძლევს:

$$P_{100000}(5800) \approx \varphi\left(\frac{5800-100000\cdot 0.06}{\sqrt{100000\cdot 0.06\cdot 0.94}}\right) / \sqrt{100000\cdot 0.06\cdot 0.94} \approx \varphi(-2.7)/75.$$

თუ ახლა გავიხსენებთ, რომ $\varphi(-x) = \varphi(x)$ და ვისარგებლებთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის ცხრილებით (რომლიდანაც $\varphi(2.7) = 0.0104$), ადვილად გამოვითვლით, რომ

$$P_{100000}(5800) \approx 0.000139.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 100-ჯერ აგდებისას გერბთა მოსვლის რიცხვი აღმოჩნდება საზღვრებში 40-დან 60-მდე.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემით. ჩვენს შემთხვევაში $p = 0.5$, $np = 100 \cdot 0.5 = 50$. ამიტომ თუ $40 < S_n < 60$, მაშინ

$$-2 < \frac{S_n - 50}{5} < 2.$$

შესაბამისად, გვაქვს:

$$p\left(40 < S_n < 60\right) = p\left(-2 < \frac{S_n - 50}{5} < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544.$$

მაგალითი 3. მაგალითი 2-ის პირობებში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა 45-ჯერ.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{45 - 50}{5} = -1$, ამიტომ

$$p_{100}(45) \approx \frac{1}{5} \cdot \varphi(-1) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(1) = \frac{1}{5} \cdot 0.2420 = 0.0484.$$

შემოვიღოთ განაწილების ფუნქციებისათვის შემდეგი აღნიშვნები:

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების ფუნქცია –

$$H(x; t, s, n) = \sum_{k \le x} \frac{C_t^k \cdot C_{n-t}^{s-k}}{C_n^s};$$

ბინომური განაწილების ფუნქცია –

$$Bi(x; p, n) = \sum_{k \le x} C_n^k p^k q^{n-k} \;;$$

პუასონის განაწილების ფუნქცია –

$$\Pi(x; \lambda) = \sum_{0 \le k \le x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია –

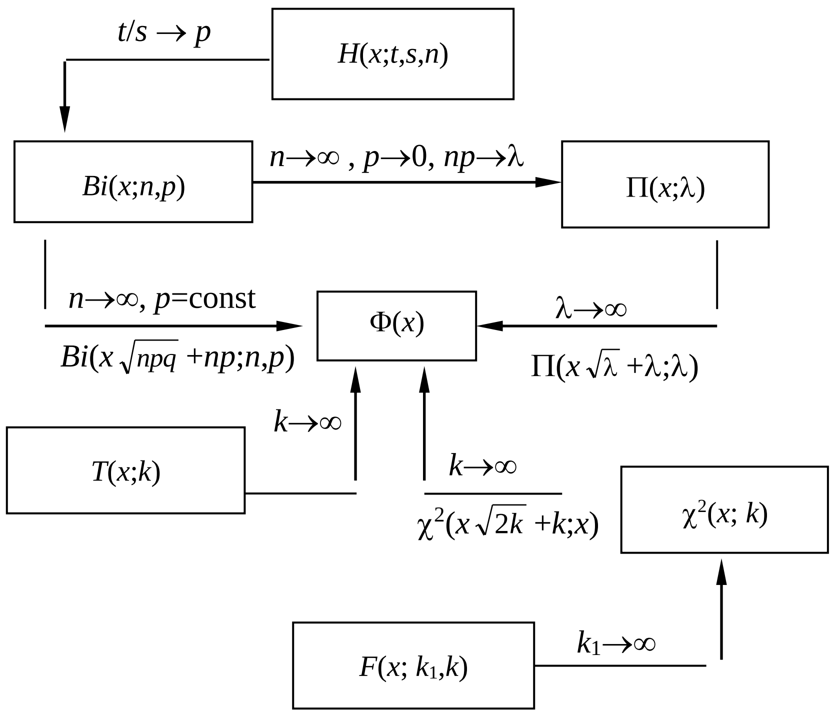
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

ხი კვადრატ განაწილების ფუნქცია – $\chi^2(x; k)$;

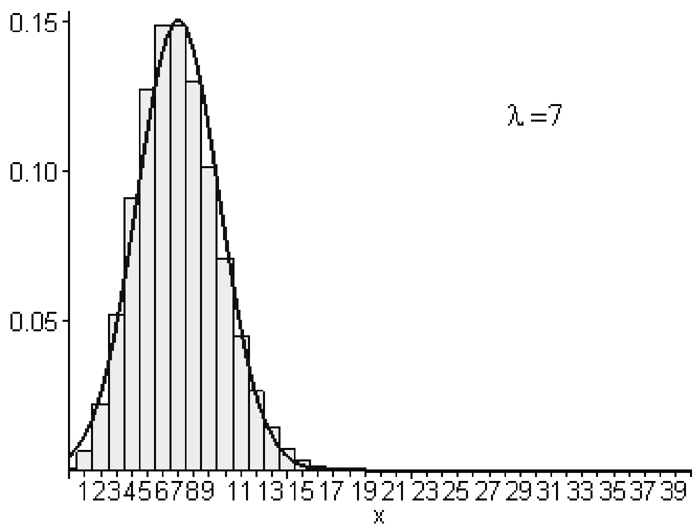
სტიუდენტის განაწილების ფუნქცია – $T(x; k)$;

ფიშერის განაწილების ფუნქცია – $F(x; k_1, k_2)$.

აღსანიშნავია, რომ ზემოთ მოყვანილი განაწილებების ფუნქციებს შორის ადგილი აქვს ქვემოთ მოყვანილ სქემაზე გამოსახულ ზღვრულ თანაფარდობებს:



ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე შედარებულია ნორმალური და პუასონის განაწილებები $\lambda=7$ -ის შემთხვევაში:



მაგალითი 4. სტუდენტი ქუჩაში თავის ლექტორს შეიძლება შეხვდეს ალბათობით 0.002. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ

1200 შემთხვევით გამვლელს შორის სტუდენტი შეხვდება თავის არა უმეტეს 3 ლექტორს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A_i=${სტუდენტი შეხვდა, i ლექტორს} $i=0,1,2,3$. მაშინ ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება იქნება $A=\bigcup_{i=0}^{3}A_i$. ცხადია, რომ

A_i ხდომილებები წყვილ-წყვილად უთავსებადია და შესაბამისად $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)$. ამასთანავე, თითოეული A_i ხდომილების ალბათობის გამოსათვლელად უნდა ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ლოკალური ფორმულით. გვაქვს:

$$P(A_0)=P_{1200}(0)=\varphi(\frac{0-1200\cdot 0.002}{\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}})/\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}\approx 0.0775;$$

$$P(A_1)=P_{1200}(1)=\varphi(\frac{1-1200\cdot 0.002}{\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}})/\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}\approx 0.1719;$$

$$P(A_2)=P_{1200}(2)=\varphi(\frac{2-1200\cdot 0.002}{\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}})/\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}\approx 0.2505;$$

$$P(A_3)=P_{1200}(3)=\varphi(\frac{3-1200\cdot 0.002}{\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}})/\sqrt{1200\cdot 0.002\cdot 0.998}\approx 0.2389.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P(A)=0.0775+0.1719+0.2505+0.2389=0.7388.$$

მაგალითი 5. როგორია ალბათობა იმისა, რომ წესიერი მონეტის 200-ჯერ აგდებისას გერბი მოვა არანაკლებ 95-ჯერ და არა უმეტეს 105-ჯერ?

ამოხსნა. უნდა ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური ფორმულით, სადაც $n=200,\ a=95,\ b=105,\ p=q=1/2$. გვაქვს:

$$P(95\le S_{200}\le 105)\approx\Phi(\frac{105-200\cdot 0.5}{\sqrt{200\cdot 0.5\cdot 0.5}})-\Phi(\frac{95-200\cdot 0.5}{\sqrt{200\cdot 0.5\cdot 0.5}})\approx$$
$$\approx\Phi(0.707)-\Phi(-0.707)=2\Phi(0.707)-1\approx 2\cdot 0.76-1=0.52$$

მაგალითი 6. ქარხნის ნაწარმის 4% მდარე ხარისხისაა. რამდენი ნაწარმი უნდა შეირჩეს პროდუქციის ხარისხის შესამოწმებლად, რომ ალბათობით 0.9 შეგვეძლოს იმის მტკიცება, რომ ქარხნის ნაწარმის შემთხვევით შერჩეულ პარტიაში მდარე ხარისხის პროდუქციის წილის განსხვავება 4%-დან აბსოლუტური სიდიდით არ აღემატება 1%-ს?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $p=\frac{4}{100}=0.04$, $\varepsilon=0.01$. θ იყოს ქარხნის ნაწარმის შემთხვევით შერჩეულ პარტიაში მდარე ხარისხის პროდუქციის წილი. ლიაპუნოვის თეორემის თანახმად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ θ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება ახლოსაა ნორმალურთან და ამიტომ

$$P\{|\theta-0.04|\le 0.01\}\approx 2\Phi(0.01/\sigma)-1=0.9.$$

აქედან $\Phi(0.01/\sigma)=0.95$და ნორმალური განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $0.01/\sigma=1.65$.

მეორეს მხრივ, $\sigma^2=p(1-p)/n=0.04\cdot 0.96/n$ ანუ $\sigma=\sqrt{0.04\cdot 0.96/n}$. შესაბამისად, შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება

$$0.01/\sqrt{0.04\cdot 0.96/n}=1.65,$$

საიდანაც ადვილად ვიპოვით, რომ $n=1045$.

მაგალითი 7. მოწყობილება შედგება 10 დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტისაგან, რომელთაგან თითოეულის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა T დროში არის 0.05. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ T დროში მწყობრიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობისა და ელემენტების მწყობრიდან გამოსვლათა საშუალო რიცხვს შორის განსხვავების მოდული აღმოჩნდება: ა) 2-ზე ნაკლები; ბ) 2-ზე არანაკლები.

ამოხსნა. ა) აღვნიშნოთ S_n სიმბოლოთი T დროში მწყობრიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობა. ცხადია, რომ ამ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ბინომიალური განაწილება და ამიტომ:

$$ES_n=np=10\cdot 0.05=0.5 \text{ და } DS_n=npq=10\cdot 0.05\cdot 0.95=0.475.$$

ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით. გვაქვს:

$$P(|S_n - ES_n| < \varepsilon) \geq 1 - DS_n / \varepsilon^2,$$

$$P(|S_n - 0.5| < 2) \geq 1 - 0.475/4 = 0.88.$$

ბ) რამდენადაც $|S_n - 0.5| < 2$ და $|S_n - 0.5| \geq 2$ საწინააღმდეგო ხდომილებებია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$P(|S_n - 0.5| \geq 2) \leq 1 - 0.88 = 0.12.$$

მაგალითი 8. A ხდომილების მოხდენის ალბათობა თითოეულ ექსპერიმენტში არის 0.5. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ 100 დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში A ხდომილების მოხდენათა S_n რიცხვი მოთავსებულია 40-დან 60-მდე.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში:

$$ES_n = np = 100 \cdot 0.5 = 50 \text{ და } DS_n = npq = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25.$$

გასაგებია, რომ ხდომილება $40 < S_n < 60$ ეკვივალენტურია ხდომილების:

$$40 - 50 < S_n - 50 < 60 - 50 \Leftrightarrow -10 < S_n - 50 < 10 \Leftrightarrow |S_n - 50| < 10.$$

შესაბამისად, ჩებიშევის უტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$P(40 < S_n < 60) = P(|S_n - 50| < 10) \geq 1 - 25/100 = 0.75.$$

მაგალითი 9. როგორ დავადგინოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შეჩეული ადამიანი აგროვებს მარკებს? შეიძლება გამოვკითხოთ გარკვეული რაოდენობა შემთხვევით შერჩეული ადამიანების. თუ n გამოკითხულში S_n ფილატელისტია, მაშინ საძიებელი ალბათობა $p \approx S_n / n$. რამდენი ადამიანი უნდა გამოიკითხოს, რომ ცდომილება არ აღემატებოდეს 0.005-ს, თუ ჩვენ გვინდა, რომ სწორი შედეგი მივიღოთ ალბათობით 0.95?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $P(|S_n/n-p|\le 0.005)=$ $=0.95$. ამიტომ მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური ფორმულა გვაძლევს:

$$0.95=P(|S_n/n-p|\le 0.005)=P(-0.005\le(S_n-np)/n\le 0.005)=$$
$$=P(-0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}\le(S_n-np)/\sqrt{npq}\le 0.005\sqrt{\frac{n}{pq}})\approx$$
$$\approx\Phi(0.005\sqrt{\frac{n}{pq}})-\Phi(-0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}).$$

ამიტომ, თუ ვისარგებლებთ თანაფარდობით $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, მივიღებთ, რომ

$$2\Phi(0.005\sqrt{\frac{n}{pq}})-1=0.95,\ \text{ანუ}\ \Phi(0.005\sqrt{\frac{n}{pq}})=0.975.$$

საიდანაც სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის ცხრილის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ

$$0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}\approx 1.96.$$

თუკი ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $pq\le 1/4$, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$n\ge 38416.$$

მაგალითი 10. მოცემულია, რომ $P(|\xi-E\xi|<\varepsilon)\ge 0.8$ და $D\xi=0.018$. იპოვეთ ε.

ამოხსნა. ჩებიშევის უტოლობის თანახმად $P(|\xi-E\xi|<\varepsilon)\ge 1-D\xi/\varepsilon^2$. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$1-D\xi/\varepsilon^2=0.8.$$

შევიტანოთ ამ განტოლებაში დისპერსიის მნიშვნელობა და ამოვხსნათ ε. გვაქვს:

$$1-0.018/\varepsilon^2=0.8,$$

აქედან, ცხადია, რომ $\varepsilon=0.3$.

მაგალითი 11. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მოცემულია განაწილების კანონით:

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

აკმაყოფილებს თუ არა ეს მიმდევრობა დიდ რიცხვთა კანონს?

ამოხსნა. შევამოწმოთ ჩებიშევის თეორემის პირობები. გასაგებია, რომ შემთხვევითი სიდიდეები წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია. გამოვთვალოთ ξ_n-ის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. გვაქვს:

$$E\xi_n = -n\alpha(1/2n^2) + 0\cdot(1-1/n^2) + n\alpha(1/2n^2) = 0 \ ;$$

$$E\xi_n^{\ 2} = n^2\alpha^2(1/2n^2) + 0\cdot(1-1/n^2) + n^2\alpha^2(1/2n^2) = n^2\alpha^2(1/n^2) = \alpha^2 \ ;$$

$$D\xi_n = E\xi_n^{\ 2} - (E\xi_n)^2 = \alpha^2 \ .$$

ამრიგად, მათემატიკური ლოდინები სასრულია და დისპერსიები თანაბრად შემოსაზღრული. ამიტომ ჩებიშევის თეორემის თანახმად აღნიშნული მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს.